Pertti Koivisto

Analyysi C

TAMPEREEN YLIOPISTO

INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKÖN RAPORTTEJA 68/2018

TAMPERE 2018

TAMPEREEN YLIOPISTO
INFORMAATIOTIETEIDEN YKSIKÖN RAPORTTEJA 68/2018
JOULUKUU 2018

Pertti Koivisto

Analyysi C

ISBN 978-952-03-0931-2 (pdf)

ISSN-L 1799-8158
ISSN 1799-8158

Analyysi C

Epäoleellinen integraali ja sarjat

Pertti Koivisto

Joulukuu 2018

Alkusanat

Tämä moniste on tarkoitettu oheislukemistoksi Tampereen yliopistossa pidettävälle kurssille Analyysi C. Monisteen tavoitteena on tukea luentojen seuraamista, harjoitustehtävien ratkaisemista ja tenttiin valmistautumista. Moniste sisältää melko kattavasti kurssilla käsiteltävät asiat, mutta paikoitellen lisäselitykset ja mahdollinen lisämateriaali helpottanevat tekstin seuraamista ja esitettyjen asioiden ymmärtämistä. Moniste ei varsinaisesti ole tarkoitettu kattavaksi itseopiskelupaketiksi.

Monisteen rakenne ja sisältö pohjautuvat suurelta osin jo edesmenneen Seppo Vepsäläisen aikoinaan Tampereen yliopistossa pitämiin luentoihin. Sisältöä on jonkin verran muokattu kevyempään suuntaan ja myös rakenteessa on tehty muutoksia.

Kurssin menestyksellinen seuraaminen edellyttää Tampereen yliopiston opintojaksoilla Analyysi A ja Analyysi B (ja niiden esitietoina olevilla opintojaksoilla) esitettyjen asioiden hyvää hallintaa. Jos kurssilla tarvittavat esitiedot ovat päässeet unohtumaan tai niiden hallinnassa on muusta syystä puutteita, myös esitietojen kertaamiseen pitää varata riittävästi aikaa (kurssin Analyysi C seuraamisen ohessa). Koska moniste on suoraa jatkoa kurssien Analyysi A ja B vastaaville monisteille, matematiikan opiskelun luonnetta koskevien huomautusten osalta näissä alkusanoissa tyydytään viittaamaan kurssin Analyysi A monisteen alkusanoihin.

Lopuksi esitän kiitokset kaikille, jotka ovat kommenteillaan, ehdotuksillaan ja neuvoillaan auttaneet minua tämän monisteen teossa.

Pertti Koivisto

Sisältö

1 Esitietoja

Kursseilla Analyysi A ja B esitetyt lukujonon ja funktion raja-arvoa, funktion jatkuvuutta ja derivaattaa sekä alkeisfunktioita ja Riemann-integraalia koskevat tulokset oletetaan jatkossa tunnetuksi.

Monisteen esimerkeissä hyödynnetään aiemmilla kursseilla käsiteltyjen alkeisfunktioiden perusominaisuuksia laskusääntöineen (sisältäen derivointi- ja integrointitulokset). Lisäksi muutamien esimerkkien ja huomautusten ymmärtäminen edellyttää perustietämystä integrointitekniikasta. Käytettyjä menetelmiä ovat esimerkiksi yhdistetyn funktion integrointisääntö, osittaisintegrointi ja sijoitussääntö.

Seuraavassa on vielä kertauksena mainittu muutamia tuloksia, joita jatkossa tullaan käyttämään. Tavanomaisten laskusääntöjen ohella monisteen esimerkeissä hyödynnetään muutamia kursseilla Analyysi A ja B johdettuja raja-arvotuloksia. Tällaisia ovat esimerkiksi raja-arvot

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

kurssilta Analyysi A sekä raja-arvot

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^s}{e^x} = 0 \quad (s\in\mathbf{R})$$

kurssilta Analyysi B.

Todistuksissa hyödynnetään myös välillä I määritellyn Riemann-integraalin

$$G(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad (x,c\in I) \tag{1.1}$$

jatkuvuutta ja mahdollista derivoituvuutta. Kyseiset tulokset esitetään viittausten selkeyttämiseksi alla vielä lauseina.

Lause 1.1. *Ehdon* (1.1) *funktio G on jatkuva välillä I.*

Lause 1.2. *Jos funktio f on jatkuva välillä I, niin ehdon* (1.1) *funktio G on paitsi jatkuva myös derivoituva välillä I ja*

$$G'(x) = f(x) \qquad \forall x\in I.$$

2 Epäoleellinen integraali

Riemann-integraalin määrittelyssä oli kaksi rajoitusta. Toisaalta integrointiväli oli äärellinen suljettu väli, ja toisaalta integroitava funktio oli rajoitettu integrointivälillä. Seuraavaksi tutkitaan tapauksia, joissa rajoitteet eivät välttämättä ole voimassa.

Aluksi luovutaan vaatimuksesta, että integroitava funktio on rajoitettu integrointivälillä. Integrointiväli on edelleen äärellinen. Sen jälkeen tarkastellaan tilannetta, jossa integrointiväli on ääretön, ja lopuksi tarkastellaan tapausta, jossa on luovuttu molemmista rajoitteista.

2.1 Integraalin suppeneminen

2.1.1 Epäoleellisuus välin päätepisteessä

Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa integroitava funktio ei ole rajoitettu integrointivälin $[a, b]$ loppupisteessä. Olkoon siis f sellainen välillä $[a, b[$ (ei siis välttämättä pisteessä b) määritelty funktio, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, z]$ kaikilla $z \in]a, b[$ eli

$$\int_a^z f(x)\,dx$$

on olemassa kaikilla $z \in]a, b[$.

Määritelmä 2.1. Jos raja-arvo

$$\lim_{z \to b-} \int_a^z f(x)\,dx$$

on äärellisenä olemassa, sanotaan että integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, ja merkitään

$$\lim_{z \to b-} \int_a^z f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Määritelmän 2.1 integraalia sanotaan funktion f *epäoleelliseksi integraaliksi* välillä $[a,b]$. Jos raja-arvo ei ole olemassa tai se ei ole äärellinen, sanotaan että integraali *hajaantuu.*

Funktion epäoleellinen integraali integrointivälin alarajalla määritellään vastaavasti. Myös tällöin integraalin sanotaan hajaantuvan, jos raja-arvo ei ole olemassa tai se ei ole äärellinen.

Määritelmä 2.2. Jos on f sellainen välillä $]a,b]$ määritelty funktio, että f on Riemann-integroituva välillä $[z,b]$ kaikilla $z \in]a,b[$ ja on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{z \to a+} \int_z^b f(x)\,dx,$$

sanotaan että integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, ja merkitään

$$\lim_{z \to a+} \int_z^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Huomautus 2.1. Määritelmän 2.1 ehto Riemann-integroituvuudesta väleillä $[a,z]$ toteutuu, jos esimerkiksi f on jatkuva välillä $[a,b[$. Vastaavasti määritelmän 2.2 ehto Riemann-integroituvuudesta väleillä $[z,b]$ toteutuu, jos f on jatkuva välillä $]a,b]$.

Huomautus 2.2. Yllä olevaa vastaava huomautus voidaan esittää myös muille luvun 2 määritelmille ja tuloksille. Toisin sanoen funktion jatkuvuus välillä I takaa funktion Riemann-integroituvuuden jokaisella välin I suljetulla osavälillä.

Huomautus 2.3. Jos halutaan korostaa integraalin epäoleellisuutta tai epäoleellisuuspisteitä, voidaan merkitä

$$\lim_{z \to b-} \int_a^z f(x)\,dx \;=\; \int_a^{b-} f(x)\,dx$$

ja

$$\lim_{z \to a+} \int_z^b f(x)\,dx \;=\; \int_{a+}^b f(x)\,dx.$$

Esimerkki 2.1. Määritetään

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin ylärajalla. Siis

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \lim_{z\to 1-} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \lim_{z\to 1-} \Big/_0^z \arcsin x \\
&= \lim_{z\to 1-} (\arcsin z - \arcsin 0) \\
&= \arcsin 1 - 0 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 2.2. Tutkitaan integraalin

$$\int_0^b \frac{1}{x^s}\,dx = \int_0^b x^{-s}\,dx \qquad (b > 0, s \in \mathbf{R})$$

suppenemista, ja osoitetaan, että

$$\boxed{\int_0^b \frac{1}{x^s}\,dx \text{ hajaantuu, kun } s \geq 1, \text{ ja suppenee, kun } s < 1.}$$

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin alarajalla.[1] Olkoon z jokin välin $]0, b[$ piste. Jos $s = 1$, niin

$$\int_z^b x^{-s}\,dx = \Big/_z^b \log x = \log b - \log z, \tag{2.1}$$

[1]Jos $s < 0$, niin x^{-s} on jatkuva välillä $[0, b]$, joten kyseessä ei ole varsinainen epäoleellisuuspiste (vrt. huomautus 2.4, s. 6).

ja jos $s \neq 1$, niin

$$\int_z^b x^{-s}\,dx \;=\; \Big/_{\!z}^{\,b} \frac{x^{1-s}}{1-s} \;=\; \frac{b^{1-s}}{1-s} - \frac{z^{1-s}}{1-s}. \tag{2.2}$$

Täten saadaan seuraavat tapaukset.

1°: Jos $s > 1$, niin tuloksen (2.2) perusteella

$$\lim_{z\to 0+} \int_z^b x^{-s}\,dx \;=\; \lim_{z\to 0+} \frac{b^{1-s} - z^{1-s}}{1-s} \;=\; \lim_{z\to 0+} \overbrace{\frac{1}{1-s}}^{<0}\Big(\overbrace{\frac{1}{b^{s-1}}}^{\text{vakio}} - \overbrace{\frac{1}{z^{s-1}}}^{\to\infty}\Big) \;=\; \infty,$$

joten integraali hajaantuu.

2°: Jos $s = 1$, niin tuloksen (2.1) perusteella

$$\lim_{z\to 0+} \int_z^b x^{-s}\,dx \;=\; \lim_{z\to 0+} \big(\overbrace{\log b}^{\text{vakio}} - \overbrace{\log z}^{\to -\infty}\big) \;=\; \infty,$$

joten integraali hajaantuu.

3°: Jos $s < 1$, niin tuloksen (2.2) perusteella

$$\lim_{z\to 0+} \int_z^b x^{-s}\,dx \;=\; \lim_{z\to 0+} \frac{b^{1-s} - z^{1-s}}{1-s} \;=\; \lim_{z\to 0+} \overbrace{\frac{1}{1-s}}^{>0}\big(\overbrace{b^{1-s}}^{\text{vakio}} - \overbrace{z^{1-s}}^{\to 0}\big) \;=\; \frac{b^{1-s}}{1-s},$$

joten integraali suppenee.

Siis kohtien 1° - 3° perusteella

$$\int_0^b \frac{1}{x^s}\,dx \text{ hajaantuu, kun } s \geq 1, \text{ ja suppenee, kun } s < 1.$$

Lisäksi integraalin supetessa

$$\boxed{\int_0^b \frac{1}{x^s}\,dx \;=\; \frac{b^{1-s}}{1-s}.}$$

Huomautus 2.4. Jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, niin

$$\lim_{z \to b-} \int_a^z f(x)\,dx \;=\; \lim_{z \to a+} \int_z^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx,$$

missä

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

on funktion f Riemann-integraali välillä $[a, b]$.

Todistus. Väite seuraa suoraan jatkuvuuden määritelmästä, sillä lauseen 1.1 (s. 1) nojalla

$$G_1(z) \;=\; \int_a^z f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad G_2(z) \;=\; \int_z^b f(x)\,dx$$

ovat jatkuvia funktiota välillä $[a, b]$. Täten

$$\lim_{z \to b-} G_1(z) \;=\; G_1(b) \qquad \text{ja} \qquad \lim_{z \to a+} G_2(z) \;=\; G_2(a).$$ □

2.1.2 Epäoleellisuus välin sisäpisteessä

Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa epäoleellisuuspiste on integrointivälin $[a, b]$ sisäpisteessä.

Määritelmä 2.3. Olkoon funktio f määritelty välillä $[a, b]$ paitsi mahdollisesti pisteessä $c \in \,]a, b[$. Oletetaan lisäksi, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, z]$ kaikilla $z \in \,]a, c[$ ja Riemann-integroituva välillä $[z, b]$ kaikilla $z \in \,]c, b[$. Tällöin sanotaan, että integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, jos integraalit

$$\int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

suppenevat. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Esimerkki 2.3. Tutkitaan integraalin

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$$

suppenemista.

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin keskellä pisteessä $x = 0$. Jos esimerkiksi $z > 0$, niin

$$\int_{z}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \;=\; \Big/_{z}^{1} -\frac{1}{2x^2} \;=\; -\frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big) \;\to\; \infty, \text{ kun } z \to 0+\,.$$

Siis integraali

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$$

hajaantuu.

Huomautus 2.5. Jos integraalin epäoleellisuuspiste on keskellä integrointiväliä, integraalin suppenemista määritettäessä raja-arvotarkastelua ei saa suorittaa epäoleellisuuspisteen eri puolilla olevissa integraaleissa yhtäaikaisesti (ks. esimerkki 2.4).

Esimerkki 2.4. Tarkastellaan esimerkin 2.3 integraalia

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx.$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0+}\Big(\int_{-1}^{-z} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{z}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx\Big) &= \lim_{z\to 0+}\Big(\Big/_{-1}^{-z} -\frac{1}{2x^2} + \Big/_{z}^{1} -\frac{1}{2x^2}\Big) \\
&= \lim_{z\to 0+} -\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\Big(\frac{1}{z^2} - 1\Big) + \Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big)}_{=0}\Big) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

mutta integraali ei siis suppene.

Huomautus. Yhtäaikaisen raja-arvotarkastelun ohella mahdollinen virhe on, että keskellä integrointiväliä olevaa integraalin epäoleellisuuspistettä ei ollenkaan huomioida. Esimerkiksi laskemalla suoraviivaisesti

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^3}\,dx \;=\; \Big/_{\!\!-1}^{\,1} -\frac{1}{2x^2} \;=\; -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) \;=\; 0$$

saadaan virheellinen tulos, sillä kyseessä on epäoleellinen integraali ja esimerkissä 2.4 osoitettiin, että kyseinen epäoleellinen integraali hajaantuu.

2.1.3 Epäoleellisuus välin molemmissa päätepisteissä

Tarkastellaan sitten vielä tapausta, jossa funktio ei ole rajoitettu integrointivälin kummassakaan päätepisteessä. Ennen varsinaista määrittelyä esitetään yksi tilannetta helpottava aputulos.

Lause 2.6. *Olkoon funktio f määritelty välillä $[a,b[$ ja $c \in \,]a,b[$. Oletetaan lisäksi, että f on Riemann-integroituva välillä $[a,z]$ kaikilla $z \in \,]a,b[$. Tällöin integraalit*

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti. Edelleen jos integraalit suppenevat, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx.$$

Todistus. Väitteet seuraavat suoraan raja-arvon laskusäännöistä, sillä

$$\overbrace{\int_a^c f(x)\,dx}^{=\,\text{vakio}} + \int_c^z f(x)\,dx \;=\; \int_a^z f(x)\,dx \qquad \forall z \in \,]c,b[$$

ja

$$\int_a^z f(x)\,dx - \int_c^z f(x)\,dx \;=\; \int_a^c f(x)\,dx \qquad \forall z \in \,]c,b[\,.$$

□

Huomautus 2.7. Lausetta 2.6 vastaava tulos on voimassa, jos epäoleellisuuspiste on integrointivälin alarajalla (harjoitustehtävä).

Sitten voidaan esittää varsinainen määrittely. Jos funktio ei ole rajoitettu integrointivälin kummassakaan päätepisteessä, tilanne yksinkertaisesti palautetaan minkä tahansa välin sisäpisteen avulla tapauksiin, jossa funktio ei ole rajoitettu integrointivälin alkupisteessä ja loppupisteessä.

Määritelmä 2.4. Olkoon funktio f Riemann-integroituva jokaisella välin $]a, b[$ suljetulla osavälillä. Olkoon lisäksi $c \in]a, b[$. Tällöin integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee, jos integraalit

$$\int_a^c f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

molemmat suppenevat. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Huomautus 2.8. Lauseen 2.6 ja huomautuksen 2.7 nojalla integraalin

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

arvo määritelmässä 2.4 ei riipu pisteen c valinnasta.

Huomautus. Määritelmässä 2.4 esitetty osaväleihin jako soveltuu myös tapauksiin, jossa funktiolla on epäoleellisuuspiste välin päätepisteessä ja sisäpisteessä (tai päätepisteissä ja sisäpisteissä).

Esimerkki 2.5. Tutkitaan integraalin

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

suppenemista.

Integraalilla on epäoleellisuuspiste integrointivälin molemmissa päätepisteissä. Aluksi havaitaan, että välillä $]0,1[$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \;=\; 2\int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\,dx \;=\; 2\arcsin\sqrt{x}+C.$$

Olkoon nyt c jokin välin $]0,1[$ piste. Tällöin

$$\lim_{z\to 0+}\int_z^c \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} \;=\; \lim_{z\to 0+} 2\left(\arcsin\sqrt{c}-\overbrace{\arcsin\sqrt{z}}^{\to 0}\right) \;=\; 2\arcsin\sqrt{c}$$

ja

$$\lim_{z\to 1-}\int_c^z \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}} \;=\; \lim_{z\to 1-} 2\left(\overbrace{\arcsin\sqrt{z}}^{\to \frac{\pi}{2}}-\arcsin\sqrt{c}\right) \;=\; \pi-2\arcsin\sqrt{c}.$$

Siis integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$$

suppenee ja

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \;&=\; \int_0^c \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx+\int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \\
&=\; 2\arcsin\sqrt{c}+\left(\pi-2\arcsin\sqrt{c}\right) \\
&=\; \pi.
\end{aligned}$$

Huomautus 2.9. Jos integraalilla on epäoleellisuuspiste integrointivälin molemmissa päätepisteissä, integraalin suppenemista määritettäessä raja-arvotarkastelua ei saa suorittaa molemmissa päätepisteissä yhtäaikaisesti (ks. esimerkki 2.6). Vrt. myös huomautus 2.5 ja huomautus 2.41 (s. 42).

Esimerkki 2.6. Tarkastellaan integraalia

$$\int_0^1 \frac{1-2x}{x(1-x)}\,dx.$$

Yhtäaikaisella raja-arvotarkastelulla saadaan

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0+}\int_z^{1-z} \frac{1-2x}{x(1-x)}\,dx &= \lim_{z\to 0+} \Big/_{z}^{1-z} \log\left(x(1-x)\right) \\ &= \lim_{z\to 0+}\Big(\log\left((1-z)z\right) - \log\left(z(1-z)\right)\Big) \\ &= 0,\end{aligned}$$

mutta integraali ei kuitenkaan suppene (harjoitustehtävä).

2.1.4 Perustuloksia

Esitetään luvun 2.1 lopuksi vielä pari epäoleellisten integraalien tutkimista helpottavaa tulosta.

Lause 2.10. *Oletetaan, että integraalit*

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b g(x)\,dx$$

suppenevat ja $\lambda \in \mathbf{R}$. *Tällöin myös funktioiden* λf *ja* $f+g$ *epäoleelliset integraalit suppenevat välillä* $[a,b]$ *ja*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx,$$

ja

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Todistus. Tulokset seuraavat suoraan raja-arvon laskusäännöistä. □

Lause 2.11. *Oletetaan, että integraali*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee. Tällöin

$$\lim_{z\to a+}\int_a^z f(x)\,dx = 0 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{z\to b-}\int_z^b f(x)\,dx = 0.$$

Todistus. Todistetaan tapaus, jossa on yksi epäoleellisuuspiste integrointivälin ylärajalla. Muut tapaukset todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä). Olkoon siis f Riemann-integroituva välillä $[a,c]$ kaikilla $c \in\,]a,b[$. Tällöin lauseen 1.1 (s. 1) nojalla

$$\lim_{z\to a+}\int_a^z f(x)\,dx \;=\; \int_a^a f(x)\,dx \;=\; 0.$$

Lisäksi lauseen 2.6 nojalla

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_z^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^z f(x)\,dx \qquad \forall z \in\,]a,b[\,,$$

joten

$$\int_z^b f(x)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^z f(x)\,dx \qquad \forall z \in\,]a,b[\,.$$

Siis raja-arvon laskusääntöjen perusteella

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to b-}\int_z^b f(x)\,dx &= \lim_{z\to b-}\Bigg(\overbrace{\int_a^b f(x)\,dx}^{=\,\text{vakio}} - \int_a^z f(x)\,dx\Bigg)\\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \lim_{z\to b-}\int_a^z f(x)\,dx\\
&= \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

2.2 Ei-negatiivisen funktion integraalin suppeneminen

Tutkitaan sitten epäoleellisen integraalin suppenemista, kun integroitava funktio on ei-negatiivinen. Tällöin pystytään hyödyntämään tietoa, että välillä $]a, b[$ kasvavalla ja ylhäältä rajoitetulla funktiolla on vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä b.

Lause 2.12. *Olkoon f sellainen välillä $[a, b[$ määritelty funktio, että f on Riemann-integroituva välillä $[a, z]$ kaikilla $z \in\,]a, b[$. Oletetaan lisäksi, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b[$. Jos tällöin on olemassa sellainen $M > 0$, että*

$$\int_a^z f(x)\,dx \;\leq\; M \qquad \forall z \in\,]a, b[\,, \tag{2.3}$$

niin

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee ja

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; M.$$

Todistus. Merkitään

$$G(z) \;=\; \int_a^z f(x)\,dx, \qquad z \in [a, b[.$$

Tällöin G on oletuksen nojalla ylhäältä rajoitettu välillä $[a, b[$. Olkoot nyt z_1 ja z_2 sellaisia välin $[a, b[$ pisteitä, että $z_1 < z_2$. Koska $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [z_1, z_2]$, niin

$$G(z_2) - G(z_1) \;=\; \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \;\geq\; 0.$$

Siis G on välillä $[a, b[$ kasvava, joten raja-arvo

$$\lim_{z \to b-} G(z)$$

on olemassa ja

$$\lim_{z \to b-} G(z) \;\leq\; M. \qquad \square$$

Huomautus 2.13. Jos funktio f on Riemann-integroituva välillä $[a, z]$ kaikilla $z \in]a, b[$ ja lisäksi $0 \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b[$, niin

$$\int_a^z f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^z M\,dx \;=\; M(z-a) \;<\; M(b-a) \qquad \forall z \in]a, b[\,.$$

Siis lauseen 2.12 ehto (2.3) on voimassa esimerkiksi (ei-negatiivisille) ylhäältä rajoitetuille funktioille.

Huomautus 2.14. Lausetta 2.12 ja huomautusta 2.13 vastaavat tulokset ovat voimassa myös välillä $]a, b]$ (harjoitustehtävä).

Esimerkki 2.7. Koska

$$0 \;\leq\; 1 + \sin\frac{1}{x} \;\leq\; 2 \qquad \forall x \in]0, 1]\,,$$

niin huomautuksen 2.13 nojalla lauseen 2.12 (ja huomautuksen 2.14) ehdot ovat voimassa. Siis

$$\int_0^1 \left(1 + \sin\frac{1}{x}\right) dx$$

suppenee.

Lause 2.15 (Majoranttiperiaate). *Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a, b[$ määriteltyjä funktiota, että f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, z]$ kaikilla $z \in]a, b[$ ja*

(i) $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b[$,

(ii) $\int_a^b g(x)\,dx$ *suppenee.*

Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee ja

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Todistus. Olkoon $z \in [a, b[$. Koska $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \in [a, b[$, niin

$$\int_z^y g(x)\,dx \;\geq\; 0 \qquad \forall y \in \,]z, b[\,.$$

Siis raja-arvon perusominaisuuksien nojalla

$$\int_z^b g(x)\,dx \;=\; \lim_{y\to b-} \int_z^y g(x)\,dx \;\geq\; 0,$$

missä raja-arvon olemassaolo seuraa ehdosta (ii) ja lauseesta 2.6 (s. 8). Täten ehdon (i) ja lauseen 2.6 nojalla

$$\int_a^z f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^z g(x)\,dx \;\leq\; \int_a^z g(x)\,dx + \int_z^b g(x)\,dx \;=\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

Siis ehdon (ii) nojalla

$$\int_a^z f(x)\,dx$$

on ylhäältä rajoitettu, joten lauseen 2.12 nojalla

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee ja

$$\int_a^b f(x)\,dx \;\leq\; \int_a^b g(x)\,dx.$$

□

Jos tutkitaan pelkästään epäoleellisen integraalin suppenemista, majoranttiperiaate voidaan esittää muodossa, jota on joskus yksinkertaisempi käyttää.

Seuraus 2.16 (Majoranttiperiaate). *Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a, b[$ määriteltyjä funktiota, että f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, z]$ kaikilla $z \in \,]a, b[$ ja*

(i) $\exists A > 0$ *ja* $\exists c \in \,]a, b[$ *siten, että* $0 \;\leq\; f(x) \;\leq\; A \cdot g(x) \quad \forall x \in [c, b[$,

(ii) $\int_c^b g(x)\,dx$ *suppenee.*

Tällöin myös

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee.

Todistus. Jos $c \in \,]a,b[$, niin lauseen 2.6 (s. 8) nojalla integraalit

$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_c^b f(x)\,dx$$

suppenevat samanaikaisesti, ja jos $A > 0$, niin lauseen 2.10 (s. 11) nojalla integraalit

$$\int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b A \cdot g(x)\,dx$$

suppenevat samanaikaisesti. □

Majoranttiperiaatetta käyttäen voidaan siis osoittaa epäoleellisen integraalin suppeneminen vertaamalla integroitavaa funktiota johonkin funktioon, jonka epäoleellisen integraalin tiedetään suppenevan. Epäoleellisen integraalin hajaantuminen voidaan vastaavalla tavalla osoittaa käyttämällä minoranttiperiaatetta. Myös minoranttiperiaatteesta esitetään kaksi versiota.

Lause 2.17 (Minoranttiperiaate). *Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a,b[$ määriteltyjä funktiota, että f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a,z]$ kaikilla $z \in \,]a,b[$ ja*

(i) $f(x) \geq g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b[$,

(ii) $\int_a^b g(x)\,dx$ *hajaantuu.*

Tällöin myös

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

hajaantuu.

Todistus. Jos

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenisi, niin ehdon (i) ja majoranttiperiaatteen perusteella myös

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

suppenisi, mistä seuraisi ristiriita ehdon (ii) kanssa. □

Seuraus 2.18 (Minoranttiperiaate). *Olkoot f ja g sellaisia välillä $[a, b[$ määriteltyjä funktiota, että f ja g ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, z]$ kaikilla $z \in \,]a, b[$ ja*

(i) $\exists A > 0$ *ja* $\exists c \in \,]a, b[$ *siten, että* $f(x) \geq A \cdot g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [c, b[$,

(ii) $\int_c^b g(x)\, dx$ *hajaantuu.*

Tällöin myös

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

hajaantuu.

Todistus. Vastaavasti kuin seuraus 2.16. □

Huomautus 2.19. Lauseita 2.15 ja 2.17 ja seurauksia 2.16 ja 2.18 vastaavat tulokset ovat voimassa myös välillä $]a, b]$ (harjoitustehtävä).

Esimerkki 2.8. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

suppenee, ja arvioidaan integraalin arvoa.

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin ylärajalla.

1°: Koska $1 \leq e^x < e$ kaikilla $x \in [0, 1[$, niin

$$0 \leq \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{e}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in [0, 1[.$$

2°: Integraali

$$\int_0^1 \frac{e}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = e \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

suppenee (esimerkki 2.1, s. 4, ja lause 2.10, s. 11).

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että integraali

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

suppenee. Lisäksi esimerkin 2.1 nojalla

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;\leq\; e\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Huomautus 2.20. Koska

$$\int_0^b \frac{1}{x^s}\,dx \qquad (b>0)$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $s<1$ (esimerkki 2.2, s. 4), niin

$$g(x) \;=\; \frac{1}{x^s}$$

on usein sopiva vertailufunktio, kun epäoleellisuuspiste on välin $[0,b]$ alarajalla.

Esimerkki 2.9. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^5 \frac{x^3+2x^2+6}{x^3+x^2}\,dx \tag{2.4}$$

hajaantuu.

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin alarajalla.

1°: Jos $0<x\leq 1$, niin $x^3\leq x^2$. Täten

$$\frac{x^3+2x^2+6}{x^3+x^2} \;\geq\; \frac{6}{x^3+x^2} \;\geq\; \frac{6}{x^2+x^2} \;=\; 3\cdot\frac{1}{x^2} \;\geq\; 0 \qquad \forall x\in\,]0,1]\,.$$

2°: $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ hajaantuu (esimerkki 2.2, s. 4).

Kohdista 1° ja 2° seuraa minoranttiperiaatteen nojalla, että integraali (2.4) hajaantuu.

Esimerkki 2.10. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\log(1+x)}\,dx$$

suppenee.

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin alarajalla.

1°: Tarkastellaan apufunktiota

$$f(x) \;=\; \log(x+1) - \frac{x}{2}, \qquad x \in [0,1]\,.$$

Nyt

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \;\geq\; 0 \qquad \forall x \in [0,1]\,,$$

joten f on kasvava välillä $[0,1]$. Koska $f(0) = 0$, niin

$$f(x) \;\geq\; 0 \qquad \forall x \in [0,1]$$

ja edelleen

$$\log\,(1+x) \;\geq\; \frac{x}{2} \qquad \forall x \in [0,1]\,.$$

Siis

$$0 \;\leq\; \frac{\sqrt{x}}{\log(1+x)} \;\leq\; \frac{\sqrt{x}}{\frac{x}{2}} \;=\; 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in \,]0,1]\,.$$

2°: Integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

suppenee (esimerkki 2.2, s. 4).

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\log(1+x)}\,dx$$

suppenee.

Huomautus 2.21. Esimerkin 2.10 vertailufunktio saadaan johdettua myös raja-arvotuloksesta

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\log(1+x)}{x} = 1,$$

sillä funktion raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen $h > 0$, että ekvivalenssin

$$\frac{1}{2} < \frac{\log(1+x)}{x} < \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{2} < \log(1+x) < \frac{3x}{2}$$

epäyhtälöt ovat voimassa välillä $]0, h] \subset]0, 1]$. Täten

$$0 < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} < \frac{1}{\log(1+x)} < 2 \cdot \frac{1}{x} \qquad \forall x \in]0, h]$$

ja edelleen

$$0 < \frac{\sqrt{x}}{\log(1+x)} < 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in]0, h]\,.$$

Esimerkki 2.11. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+x)}\, dx$$

hajaantuu.

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin alarajalla.

1°: Huomautuksen 2.21 nojalla on olemassa sellainen $h > 0$, että

$$\frac{1}{\log(1+x)} \geq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} > 0 \qquad \forall x \in]0, h]\,.$$

2°: Integraali

$$\int_0^h \frac{1}{x}\, dx$$

hajaantuu (esimerkki 2.2, s. 4).

Kohdista 1° ja 2° seuraa minoranttiperiaatteen nojalla, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\log(1+x)}\, dx$$

hajaantuu.

Huomautus 2.22. Koska

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^s}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^b \frac{1}{(b-x)^s}\,dx \qquad (a<b)$$

suppenevat täsmälleen silloin, kun $s < 1$ (harjoitustehtävä, vrt. huomautus 2.20), niin

$$g(x) = \frac{1}{(x-a)^s}$$

on usein sopiva vertailufunktio, kun epäoleellisuuspiste on välin $[a, b]$ alarajalla, ja vastaavasti

$$g(x) = \frac{1}{(b-x)^s}$$

on sopiva vertailufunktio, kun epäoleellisuuspiste on välin $[a, b]$ ylärajalla.

Esimerkki 2.12. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{(\pi - x)^2}\,dx \tag{2.5}$$

hajaantuu.

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin ylärajalla.

1°: Koska $\sin x = \sin(\pi - x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{x\to\pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Siis on olemassa sellainen luku h, että $0 < h < \pi$ ja

$$\frac{\sin x}{\pi - x} \geq \frac{1}{2} \qquad \forall x \in [\pi - h, \pi[$$

sekä edelleen

$$\frac{\sin x}{(\pi - x)^2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi - x} \qquad \forall x \in [\pi - h, \pi[\,.$$

2°: Huomautuksen 2.22 perusteella $\displaystyle\int_{\pi-h}^{\pi} \frac{1}{\pi - x}\,dx$ hajaantuu.

Kohdista 1° ja 2° seuraa minoranttiperiaatteen nojalla, että integraali (2.5) hajaantuu.

2.3 Itseinen suppeneminen

Tarkastellaan vielä lyhyesti epäoleellisen integraalin itseistä suppenemista. Itseistä suppenemista koskevissa määritelmissä ja lauseissa oletetaan tietysti, että tarkasteltava funktio on Riemann-integroituva epäoleellisen integraalin määrittelyissä esiintyvillä integrointivälin suljetuilla osaväleillä (ks. huomautus 2.25, s. 24).

Määritelmä 2.5. Epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee itseisesti, jos vastaava epäoleellinen integraali

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

suppenee.

Lause 2.23. *Jos integraali*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee itseisesti, se suppenee tavallisessakin mielessä.

Todistus. Oletetaan, että

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$

suppenee. Koska

$$0 \;\le\; |f(x)| - f(x) \;\le\; 2\,|f(x)| \qquad \forall x \in [a,b]\,,$$

niin majoranttiperiaatteen nojalla myös

$$\int_a^b (|f(x)| - f(x))\,dx$$

suppenee. Täten lauseen 2.10 (s. 11) nojalla myös epäoleellinen integraali

$$\int_a^b \Big(|f(x)| - (|f(x)| - f(x))\Big)\,dx \;=\; \int_a^b f(x)\,dx$$

suppenee. □

Esimerkki 2.13. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\frac{1}{x}\,dx$$

suppenee.

Epäoleellisuuspiste on nyt integrointivälin alarajalla. Tutkitaan itseistä suppenemista.

1°: Koska

$$0 \le \left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1 \qquad \forall x \in \,]0,1]\,,$$

niin

$$0 \le \left|\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\frac{1}{x}\right| \le \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\right| = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in \,]0,1]\,.$$

2°: Integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

suppenee (esimerkki 2.2, s. 4).

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että integraali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin\frac{1}{x}\,dx$$

suppenee itseisesti ja samalla lauseen 2.23 nojalla myös tavallisesssa mielessä.

Huomautus 2.24. Lause 2.23 ei ole voimassa kääntäen (ks. esimerkki 2.14).

Määritelmä 2.6. Epäoleellinen integraali *suppenee ehdollisesti*, jos se suppenee tavallisessa mielessä, mutta ei suppene itseisesti.

Esimerkki 2.14. Voidaan osoittaa, että integraali

$$\int_0^{\frac{1}{\pi}} \frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}\,dx$$

suppenee ehdollisesti eli se suppenee tavallisessa mielessä, mutta ei suppene itseisesti (harjoitustehtävä, vrt. huomautukset 2.26, s. 26, ja 2.40, s. 40).

Huomautus 2.25. Itseistä suppenemista koskevissa määritelmissä ja lauseissa oletetaan tietysti, että tarkasteltava funktio on Riemann-integroituva epäoleellisen integraalin määrittelyissä esiintyvillä integrointivälin suljetuilla osaväleillä. Jos esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbf{Q}, \\ -1, & \text{kun } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

niin integraalin

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ei sanota suppenevan, vaikka integraali

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^b 1\,dx = b - a$$

suppenee, sillä f ei ole Riemann-integroituva millään suljetulla välillä.

2.4 Integrointi yli äärettömän välin

Edellä laajennettiin Riemann-integraali tapauksiin, joissa integroitava funktio ei ollut rajoitettu integrointivälillä. Seuraavaksi tutkitaan integrointia, kun integrointiväli ei ole rajoitettu. Luvuissa 2.4.1–2.4.3 keskitytään väliin $[a, \infty[$. Luvussa 2.4.4 (s. 40) tarkastelu laajennetaan koskemaan myös väliä $]-\infty, b]$ ja luvussa 2.4.5 (s. 43) vastaavasti erilaisten epäoleellisten integraalien yhdistelmiä.

2.4.1 Integraalin suppeneminen

Olkoon f sellainen funktio, että f on Riemann-integroituva jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä eli

$$\int_a^z f(x)\,dx$$

on olemassa kaikilla $z > a$.

Määritelmä 2.7. Jos raja-arvo

$$\lim_{z \to \infty} \int_a^z f(x)\,dx$$

on äärellisenä olemassa, sanotaan, että integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee, ja merkitään

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{z \to \infty} \int_a^z f(x)\,dx.$$

Määritelmän 2.7 integraalia sanotaan funktion f *epäoleelliseksi integraaliksi* välillä $[a, \infty[$. Jos raja-arvo ei ole olemassa tai se ei ole äärellinen, sanotaan, että integraali *hajaantuu*.

Huomautus. Määritelmässä 2.7 ei edellytetä, että funktio f on rajoitettu välillä $[a, \infty[$ (toki f on rajoitettu välin $[a, \infty[$ suljetuilla osaväleillä) tai että funktiolla $f(x)$ on raja-arvo, kun $x \to \infty$ (ks. esimerkki 2.26, s. 39).

Esimerkki 2.15. Integraali

$$\int_0^\infty \sin x \, dx$$

hajaantuu, sillä raja-arvo

$$\lim_{z\to\infty} \int_0^z \sin x \, dx \;=\; \lim_{z\to\infty} \Big/_0^z -\cos x \;=\; \lim_{z\to\infty} (1 - \cos z)$$

ei ole olemassa.

Esimerkki 2.16. Määritetään

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \log^2 x} \, dx.$$

Käyttämällä yhdistetyn funktion derivointisääntöä sekä potenssin ja logaritmin derivointikaavoja saadaan

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} \int_e^z \frac{1}{x \log^2 x} \, dx &= \lim_{z\to\infty} -\int_e^z (-1) \cdot \frac{1}{\log^2 x} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
&= \lim_{z\to\infty} -\Big/_e^z \frac{1}{\log x} \\
&= \lim_{z\to\infty} -\Big(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{\log e}\Big) \\
&= -(0 - 1) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Huomautus 2.26. Olkoon $a > 0$. Tällöin integraalit

$$\int_a^\infty f(x) \, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2} \cdot f\Big(\frac{1}{x}\Big) \, dx$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti ja niiden supetessa

$$\int_a^\infty f(x) \, dx \;=\; \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2} \cdot f\Big(\frac{1}{x}\Big) \, dx.$$

Todistus. Tulos seuraa raja-arvon perusominaisuuksista, sillä sijoittamalla

$$x = \frac{1}{t}$$

ja

$$dx = -\frac{1}{t^2} \cdot dt, \quad a \to \frac{1}{a}, \quad z \to \frac{1}{z}$$

saadaan

$$\int_a^z f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{z}} f\Big(\frac{1}{t}\Big) \cdot \Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\,dt = \int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{t^2}\, f\Big(\frac{1}{t}\Big)\,dt = \int_{\frac{1}{z}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2}\, f\Big(\frac{1}{x}\Big)\,dx.$$

□

Esimerkki 2.17. Tutkitaan integraalin

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenemista ($a > 0$, $s \in \mathbf{R}$), ja osoitetaan, että

$$\boxed{\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \text{ suppenee, kun } s > 1, \text{ ja hajaantuu, kun } s \leq 1.}$$

Huomautuksen 2.26 perusteella

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx = \int_a^\infty \Big(\frac{1}{x}\Big)^s\,dx$$

suppenee täsmälleen silloin, kun

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^2} \cdot x^s\,dx = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^{2-s}}\,dx$$

suppenee. Integraali

$$\int_0^{\frac{1}{a}} \frac{1}{x^{2-s}}\,dx$$

puolestaan suppenee esimerkin 2.2 (s. 4) nojalla täsmälleen silloin, kun $2 - s < 1$ eli kun $s > 1$. Siis

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^s}\,dx \text{ suppenee, kun } s > 1, \text{ ja hajaantuu, kun } s \leq 1.$$

Aiemmisssa luvuissa esitetyt epäoleellisia integraaleja koskevat tulokset ovat vastaavalla tavalla voimassa, kun integrointiväli ei ole rajoitettu. Lauseet todistetaan vastaavasti kuin rajoittamattomien funktioiden tapauksessa, ja todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

Lause 2.27. *Olkoon funktio f Riemann-integroituva jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä. Olkoon lisäksi $b > a$. Tällöin integraalit*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_b^\infty f(x)\,dx$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti ja niiden supetessa

$$\int_a^\infty f(x)\,dx - \int_b^\infty f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. lause 2.6, s. 8).

Lause 2.28. *Oletetaan, että integraalit*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

suppenevat. Tällöin

(i) $\int_a^\infty c\,f(x)\,dx$ *suppenee ja*

$$\int_a^\infty c\,f(x)\,dx = c\int_a^\infty f(x)\,dx \quad (c \in \mathbf{R}),$$

(ii) $\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx$ *suppenee ja*

$$\int_a^\infty (f+g)(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx + \int_a^\infty g(x)\,dx.$$

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. lause 2.10, s. 11).

Lause 2.29. *Oletetaan, että integraali*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee. Tällöin

$$\lim_{z\to\infty} \int_z^\infty f(x)\,dx \;=\; 0.$$

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. lause 2.11, s. 12).

2.4.2 Ei-negatiivisen funktion integraalin suppeneminen

Ei-negatiivisen funktion integraalin suppenemisen tutkimiseen on rajoittamattomalla välillä käytössä samat aputulokset kuin tapauksessa, jossa funktion arvo ei ole rajoitettu. Perustuloksena on nytkin, että ei-negatiivisen funktion integraali on kasvava ja että kasvavalla ylhäältä rajoitetulla funktiolla on raja-arvo.

Lause 2.30. *Olkoon f sellainen funktio, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq a$ ja f on Riemann-integroituva jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä. Jos tällöin on olemassa sellainen $M > 0$, että*

$$\int_a^z f(x)\,dx \;\leq\; M \qquad \forall z > a,$$

niin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee ja

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \;\leq\; M.$$

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. lause 2.12, s. 13).

Esimerkki 2.18. Olkoon $a > 0$. Osoitetaan, että integraali

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \tag{2.6}$$

suppenee, ja arvioidaan integraalin arvoa.

Selvästi

$$\frac{\sin^2 x}{x^2} \geq 0 \qquad \forall x \geq a.$$

Koska $\sin^2 x \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin lisäksi

$$\int_a^z \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \leq \int_a^z \frac{1}{x^2}\,dx = \Big/_a^z -\frac{1}{x} = \frac{1}{a} - \frac{1}{z} < \frac{1}{a} \qquad \forall z > a.$$

Siis lauseen 2.30 nojalla integraali (2.6) suppenee ja

$$\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx \leq \frac{1}{a}.$$

Myös majorantti- ja minoranttiperiaatteet ovat voimassa vastaavalla tavalla kuin rajoittamattomille funktioille. Periaatteet todistetaan vastaavasti kuin rajoittamattomien funktioiden tapauksessa, ja todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

Lause 2.31 (Majoranttiperiaate). *Oletetaan, että f ja g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä ja*

(i) $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$,

(ii) $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *suppenee.*

Tällöin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee ja

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx.$$

Todistus. Kuten lause 2.15 (s. 14). □

Seuraus 2.32 (Majoranttiperiaate). *Oletetaan, että f ja g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä ja*

(i) $\exists A > 0$ *ja* $\exists c \in\,]a, \infty[$ *siten, että* $0 \le f(x) \le A \cdot g(x) \quad \forall x \ge c$,

(ii) $\int\limits_c^\infty g(x)\, dx$ *suppenee.*

Tällöin myös

$$\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$$

suppenee.

Todistus. Kuten seuraus 2.16 (s. 15). □

Rajoittamattomien funktioiden tapaan majoranttiperiaatteella on nyt mahdollista osoittaa epäoleellisen integraalin suppeneminen vertaamalla integroitavaa funktiota johonkin funktioon, jonka integraalin tiedetään suppenevan. Edellytyksenä tietysti on, että tällainen funktio löydetään. Vastaavasti minoranttiperiaatteella voidaan osoittaa epäoleellisen integraalin hajaantuminen vertaamalla integroitavaa funktiota johonkin funktioon, jonka integraalin tiedetään hajaantuvan.

Lause 2.33 (Minoranttiperiaate). *Oletetaan, että f ja g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä ja*

(i) $0 \le g(x) \le f(x) \quad \forall x \ge a$,

(ii) $\int\limits_a^\infty g(x)\, dx$ *hajaantuu.*

Tällöin myös

$$\int\limits_a^\infty f(x)\, dx$$

hajaantuu.

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. lause 2.17, s. 16).

Seuraus 2.34 (Minoranttiperiaate). *Oletetaan, että f ja g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä ja*

(i) $\exists A > 0$ *ja* $\exists c \in \,]a, \infty[$ *siten, että* $0 \leq A \cdot g(x) \leq f(x) \quad \forall x \geq a$,

(ii) $\int\limits_c^\infty g(x)\,dx$ *hajaantuu.*

Tällöin myös

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$$

hajaantuu.

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. seuraus 2.18, s. 17).

Esimerkki 2.19. Tutkitaan epäoleellisen integraalin

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}\,dx \qquad (a > 0)$$

suppenemista.

1°: Koska

$$x^2 + \sqrt{x} \;\geq\; x^2 \;>\; 0 \qquad \forall x \geq a,$$

niin

$$0 \;<\; \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \;\leq\; \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \geq a.$$

2°: Integraali

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

suppenee (esimerkki 2.17, s. 27).

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että integraali

$$\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}}\,dx$$

suppenee (kun $a > 0$).

Esimerkki 2.20. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{2+\sin x}{x}\,dx \tag{2.7}$$

hajaantuu.

1°: Koska $2+\sin x \geq 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\frac{2+\sin x}{x} \;\geq\; \frac{1}{x} \;>\; 0 \qquad \forall x \geq 1.$$

2°: Integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

hajaantuu (esimerkki 2.17, s. 27).

Kohdista 1° ja 2° seuraa minoranttiperiaatteen nojalla, että integraali (2.7) hajaantuu.

Esimerkki 2.21. Tutkitaan epäoleellisen integraalin

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

suppenemista.

1°: Koska

$$0 \;<\; x+\sqrt{x} \;\leq\; x+x \;=\; 2x \qquad \forall x \geq 1,$$

niin

$$\frac{1}{x+\sqrt{x}} \;\geq\; \frac{1}{2x} \;=\; \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} \;>\; 0 \qquad \forall x \geq 1.$$

2°: Integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

hajaantuu (esimerkki 2.17, s. 27).

Kohdista 1° ja 2° seuraa minoranttiperiaatteen nojalla, että integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

hajaantuu.

Lause 2.35. *Olkoot f ja g sellaisia funktioita, että $f(x) \geq 0$ ja $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq a$ ja f sekä g ovat Riemann-integroituvia jokaisella välin $[a, \infty[$ suljetulla osavälillä. Jos tällöin on olemasssa raja-arvo*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = B \qquad (0 < B < \infty),$$

niin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

suppenevat (tai hajaantuvat) samanaikaisesti.

Todistus. Koska $B > 0$ ja $f(x) \geq 0$ sekä $g(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq a$, voidaan olettaa, että muuttujan x jostakin riittävän suuresta arvosta alkaen $g(x) > 0$. Siis raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $x_0 > a$, että

$$\frac{1}{2} \cdot B < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2} \cdot B \qquad \forall x \geq x_0$$

ja edelleen

$$0 < \frac{B}{2} \cdot g(x) < f(x) < \frac{3B}{2} \cdot g(x) \qquad \forall x \geq x_0.$$

Täten majorantti- ja minoranttiperiaatteiden nojalla integraalit

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_a^\infty g(x)\,dx$$

suppenevat samanaikaisesti. □

Huomautus 2.36. Jos lauseessa 2.35 raja-arvo $B = 0$ ja integraali

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

suppenee, myös integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee.

Todistus. Harjoitustehtävä.

Huomautus 2.37. Jos lauseessa 2.35 raja-arvo $B = \infty$ ja integraali

$$\int_a^\infty g(x)\,dx$$

hajaantuu, myös integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

hajaantuu.

Todistus. Harjoitustehtävä.

Esimerkki 2.22. Osoitetaan, että integraali

$$\int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2}\,dx \qquad (s \in \mathbf{R})$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $s < 1$.

Olkoon

$$f(x) = \frac{x^s}{1+x^2} \qquad (x \geq 1)$$

ja

$$g(x) = \frac{x^s}{x^2} \qquad (x \geq 1).$$

Tällöin $f(x) > 0$ sekä $g(x) > 0$ kaikilla $x \geq 1$. Lisäksi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^s \cdot x^2}{(1+x^2)\cdot x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = 1 > 0.$$

Edelleen esimerkin 2.17 (s. 27) nojalla

$$\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^{2-s}}\,dx$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $2 - s > 1$ eli $s < 1$. Siis lauseen 2.35 perusteella

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \int_1^\infty \frac{x^s}{1+x^2}\,dx$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $s < 1$.

Huomautus. Lausetta 2.35 on toisinaan helpompi soveltaa kuin majorantti- ja minoranttiperiaatteita. Kyseiset periaatteet ovat kuitenkin sikäli yleisempiä, että niitä voi joskus käyttää siinäkin tapauksessa, että lauseen 2.35 vaatimaa raja-arvoa ei ole olemassa (ks. esimerkki 2.20).

Lisäksi majorantti- ja minoranttiperiaatteita voi aina käyttää, kun lauseen 2.35 vaatima raja-arvo on olemassa. Tarvittava majoroiva tai minoroiva funktio saadaan tällöin lauseen 2.35 todistuksessa käytetyllä menettelyllä.

Esimerkki 2.23. Osoitetaan lausetta 2.35 käyttäen, että esimerkin 2.21 epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

hajaantuu.

Olkoon

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x+\sqrt{x}} \qquad (x \geq 1)$$

ja

$$g(x) \;=\; \frac{1}{x} \qquad (x \geq 1).$$

Nyt $f(x) > 0$ ja $g(x) > 0$ kaikilla $x \geq 1$. Lisäksi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{1}{x+\sqrt{x}} \Big/ \frac{1}{x} \;=\; \frac{x}{x+\sqrt{x}} \;=\; \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \;\to\; 1,$$

kun $x \to \infty$, ja integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

hajaantuu (esimerkki 2.17, s. 27).

Täten integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

hajaantuu lauseen 2.35 perusteella.

2.4.3 Itseinen suppeneminen

Tarkastellaan sitten vielä epäoleellisen integraalin itseistä suppenemista, kun integrointiväli ei ole rajoitettu. Itseistä suppenemista koskevissa määritelmissä ja lauseissa oletetaan tietysti, että tarkasteltava funktio on Riemann-integroituva integrointivälin kaikilla suljetuilla osaväleillä (vrt. huomautus 2.25, s. 24).

Aiemmin esitetyt epäoleellisen integraalin itseistä suppenemista koskevat tulokset ovat vastaavalla tavalla voimassa, kun integrointiväli ei ole rajoitettu. Tulokset todistetaan vastaavasti kuin rajoittamattomien funktioiden tapauksessa, ja todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

Määritelmä 2.8. Epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee itseisesti, jos vastaava epäoleellinen integraali

$$\int_a^\infty |f(x)|\,dx$$

suppenee.

Lause 2.38. *Jos integraali*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

suppenee itseisesti, se suppenee tavallisessakin mielessä.

Todistus. Harjoitustehtävä (vrt. lause 2.23, s. 22).

Huomautus 2.39. Nytkin epäoleellinen integraali *suppenee ehdollisesti*, jos se suppenee tavallisessa mielessä, mutta ei suppene itseisesti.

Esimerkki 2.24. Integraalit

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s}\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^s}\,dx$$

suppenevat itseisesti majoranttiperiaatteen nojalla ainakin silloin, kun $s > 1$, sillä

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x^s}\right| \le \frac{1}{x^s} \qquad \text{ja} \qquad 0 \le \left|\frac{\cos x}{x^s}\right| \le \frac{1}{x^s}$$

kaikilla $x \ge 1$ ja

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$$

suppenee, kun $s > 1$ (esimerkki 2.17, s. 27).

Esimerkki 2.25. Osoitetaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$$

suppenee.

Tutkitaan itseistä suppenemista.

1°: Nyt

$$0 \le \left|\frac{\cos(x^2)}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2} \qquad \forall x \ge 1.$$

2°: Integraali

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

suppenee (esimerkki 2.17, s. 27).

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että integraali

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos(x^2)}{x^2}\right|\,dx$$

suppenee, joten lauseen 2.38 nojalla myös integraali

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$$

suppenee.

Esimerkki 2.26. Osoitetaan esimerkkiä 2.25 hyödyntämällä, että epäoleellinen integraali

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx.$$

suppenee.

Olkoon $z > 1$. Osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_1^z \sin(x^2)\,dx &= \frac{1}{2}\int_1^z \Big(-\frac{1}{x}\Big)\cdot(-\sin(x^2)\cdot 2x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_1^z \Big(-\frac{1}{x}\Big)\cdot D\Big(\cos(x^2)\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\Big/_1^z \Big(-\frac{1}{x}\Big)\cdot\cos(x^2) - \frac{1}{2}\int_1^z \frac{1}{x^2}\cdot\cos(x^2)\,dx. \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\frac{\cos(z^2)}{z} - 1\cdot\cos 1\Big) - \frac{1}{2}\int_1^z \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Nyt

$$\lim_{z\to\infty} -\frac{1}{2}\Big(\overbrace{\frac{\cos(z^2)}{z}}^{\to 0} - \cos 1\Big) = \frac{\cos 1}{2}.$$

Lisäksi raja-arvo

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{2}\int_1^z \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$$

on olemassa, sillä

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x^2)}{x^2}\,dx$$

suppenee (esimerkki 2.25).

Siis raja-arvo

$$\lim_{z\to\infty}\int_1^z \sin(x^2)\,dx$$

on olemassa, joten

$$\int_1^\infty \sin(x^2)\,dx$$

suppenee.

Huomautus 2.40. Lause 2.38 ei ole voimassa kääntäen. Voidaan esimerkiksi osoittaa, että

$$\int_{\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

suppenee ehdollisesti (harjoitustehtävä, vrt. esimerkki 2.14, s. 23).

2.4.4 Muut rajoittamattomat välit

Luvuissa 2.4.1–2.4.3 laajennettiin Riemann-integraali tapauksiin, joissa integrointiväli oli $[a, \infty[$. Integraali

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$$

määritellään vastaavasti eli integraali *suppenee*, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to -\infty} \int_{z}^{b} f(x)\, dx$$

on äärellisenä olemassa. Luvuissa 2.4.1–2.4.3 esitetyt tulokset ovat vastaavasti voimassa myös integrointivälillä $]-\infty, b]$.

Integrointiväli voi olla rajoittamaton myös molemmissa päätepisteissä. Tällöin integraali määritellään vastaavasti kuin luvussa 2.1 jakamalla välipisteen avulla integraali kahteen osaan. Siis integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

määritellään integraalien

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)\, dx \qquad\qquad (c \in \mathbf{R})$$

avulla.

Esimerkki 2.27. Määritetään

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx. \tag{2.8}$$

Neliöimällä saadaan

$$x^2+x+1 \;=\; \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4} \;=\; \tfrac{3}{4}\left(\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right),$$

joten

$$\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,dx \;=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Siis

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty}\int_0^z \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \;&=\; \lim_{z\to\infty}\Big/_0^z \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\\
&=\; \lim_{z\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\Bigg(\overbrace{\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}}^{\to\frac{\pi}{2}}-\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\Bigg)\\
&=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \;=\; \frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to-\infty}\int_z^0 \frac{1}{x^2+x+1}\,dx \;&=\; \lim_{z\to-\infty}\Big/_z^0 \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\\
&=\; \lim_{z\to-\infty}\frac{2}{\sqrt{3}}\Bigg(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\overbrace{\arctan\frac{2z+1}{\sqrt{3}}}^{\to-\frac{\pi}{2}}\Bigg)\\
&=\; \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Siis integraali (2.8) suppenee ja

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx \;&=\; \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx+\int_0^{\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\,dx\\
&=\; \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)\\
&=\; \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Huomautus 2.41. Jos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

suppenee, niin raja-arvo

$$\lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} f(x)\,dx$$

on olemassa. Sen sijaan kääntäen raja-arvo voi olla olemassa integraalin silti hajaantuessa (ks. esimerkki 2.28). Vrt. myös huomautus 2.9, s. 10.

Esimerkki 2.28. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) \;=\; \frac{2x+1}{x^2+1}.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx \;&=\; \lim_{z\to\infty} \int_{-z}^{z} \left(\frac{2x}{x^2+1} \;+\; \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\
&=\; \lim_{z\to\infty} \Big/_{-z}^{z} \Big(\log(x^2+1) \;+\; \arctan x\Big) \\
&=\; \lim_{z\to\infty} \Big(\Big(\log(z^2+1) + \arctan z\Big) \\
&\qquad\qquad - \Big(\log((-z)^2+1) + \arctan(-z)\Big) \Big) \\
&=\; \lim_{z\to\infty} \Big(\overbrace{\log(z^2+1) - \log(z^2+1)}^{=0} + \overbrace{\arctan z}^{\to\frac{\pi}{2}} - \overbrace{\arctan(-z)}^{\to-\frac{\pi}{2}} \Big) \\
&=\; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
&=\; \pi.
\end{aligned}$$

Integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx$$

ei kuitenkaan suppene, sillä esimerkiksi integraali

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx \;=\; \lim_{z\to\infty} \Big(\Big(\log(z^2+1) + \arctan z\Big) - (0+0)\Big) \;=\; \infty$$

hajaantuu.

2.4.5 Rajoittamaton funktio ja ääretön väli

Integraalia voidaan tarkastella myös tapauksissa, joissa sekä funktio ei ole rajoitettu integrointivälillä että integrointiväli ei ole rajoitettu. Jos integrointiväli ei ole rajoitettu ja funktiolla on integrointivälin toisessa päätepisteessä epäoleellisuuspiste, integraali määritellään vastaavasti kuin luvussa 2.1 (määritelmä 2.4, s. 9) jakamalla välipisteen avulla integraali kahteen osaan. Siis integraali

$$\int_{a+}^{\infty} f(x)\,dx$$

määritellään integraalien

$$\int_{a+}^{c} f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (a < c)$$

avulla ja integraali

$$\int_{-\infty}^{b-} f(x)\,dx$$

integraalien

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{c}^{b-} f(x)\,dx \qquad (c < b)$$

avulla.

Jos epäoleellisuuspiste c on rajoittamattoman välin keskellä, määritellään epäoleellinen integraali kuten vastaavassa tapauksessa luvussa 2.1 (määritelmä 2.3, s. 6) yhdistämällä epäoleelliset integraalit, joissa c on integrointivälin loppupiste ja alkupiste. Siis integraali

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$$

määritellään integraalien

$$\int_{a}^{c} f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (a < c)$$

avulla, integraali

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

integraalien

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{c}^{b} f(x)\,dx \qquad (c < b)$$

avulla ja integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

integraalien

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \qquad \text{ja} \qquad \int_{c}^{\infty} f(x)\,dx \qquad\qquad (c \in \mathbf{R})$$

avulla. Alkuperäinen integraali tulee tällöin jaetuksi vähintään kolmeksi integraaliksi, sillä ainakin toinen yhdistettävistä integraaleista on sellainen, että funktio ei ole rajoitettu integrointivälillä ja integrointiväli ei ole rajoitettu. Täten kyseinen integraali on jaettava uuden välipisteen avulla vielä (ainakin) kahteen osaan.

Esimerkki 2.29. Tutkitaan integraalin

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

suppenemista.

Integraalilla on epäoleellisuuspiste myös alarajalla, joten jaetaan epäoleellisuustarkastelu kahteen osaan valitsemalla $c = 1$ jakopisteeksi. Koska

$$x^2+\sqrt{x} \;\geq\; \sqrt{x} \;>\; 0 \qquad \forall x \in \,]0,1]\,,$$

niin

$$0 \;<\; \frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \;\leq\; \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \forall x \in \,]0,1]\,.$$

Koska lisäksi

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

suppenee (esimerkki 2.2, s. 4, $s = \frac{1}{2}$), niin majoranttiperiaatteen nojalla integraali

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

suppenee.

Toisaalta esimerkin 2.19 (s. 32) nojalla myös integraali

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

suppenee ($a = 1$). Täten integraali

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx \;+\; \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,dx$$

suppenee.

Esimerkki 2.30. Tutkitaan *Eulerin gammafunktiota*

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \qquad (s>0).^1$$

Jaetaan epäoleellisuustarkastelu kahteen osaan kirjoittamalla

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx = I_1 + I_2.$$

1°: Koska e^{-x} on aidosti vähenevä, niin

$$1 = e^0 > e^{-x} \geq e^{-1} > 0 \qquad \forall x \in \,]0,1]\,.$$

Täten

$$0 < x^{s-1}e^{-x} < x^{s-1} \qquad \forall x \in \,]0,1]\,.$$

Lisäksi esimerkin 2.2 (s. 4) nojalla

$$\int_0^1 x^{s-1}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-s}}\,dx$$

suppenee, kun $1-s<1$ eli $s>0$. Täten majoranttiperiaatteen nojalla myös I_1 suppenee, kun $s>0$.

2°: Koska

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{s-1}\,e^{-x}}{x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{s+1}}{e^x} = 0$$

ja

$$\int_1^\infty x^{-2}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

suppenee esimerkin 2.17 (s. 27) nojalla, niin huomautuksen 2.36 (s. 34) nojalla myös integraali I_2 suppenee.

Täten kohtien 1° ja 2° perusteella $\Gamma(s)$ suppenee (kun $s>0$). Käyttämällä osittaisintegrointia saadaan (kun $x,s>0$)

$$\begin{aligned}\int x^{s-1}e^{-x}\,dx &= \frac{x^s}{s}\cdot e^{-x} - \int \frac{x^s}{s}\cdot(-e^{-x})\,dx \\ &= \frac{1}{s}\,x^s e^{-x} + \frac{1}{s}\int x^s e^{-x}\,dx.\end{aligned}$$

[1] Jos $s \leq 0$, niin integraali hajaantuu (harjoitustehtävä).

Täten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx &= \lim_{z\to 0+}\int_z^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{z\to 0+}\left(\frac{1}{s}\Big/_{\!z}^{1} x^s e^{-x} + \frac{1}{s}\int_z^1 x^s e^{-x}\,dx\right) \\
&= \lim_{z\to 0+}\frac{1}{s}\big(e^{-1} - \underbrace{z^s e^{-z}}_{\to 0}\big) + \lim_{z\to 0+}\frac{1}{s}\int_z^1 x^s e^{-x}\,dx \\
&= \frac{1}{s\cdot e} + \frac{1}{s}\int_0^1 x^s e^{-x}\,dx,
\end{aligned}$$

kun $s > 0$. Koska

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^s}{e^z} = 0,$$

niin vastaavasti (kun $s > 0$)

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx &= \lim_{z\to\infty}\int_1^z x^{s-1}e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{z\to\infty}\left(\frac{1}{s}\Big/_{\!1}^{z} x^s e^{-x} + \frac{1}{s}\int_1^z x^s e^{-x}\,dx\right) \\
&= \lim_{z\to\infty}\frac{1}{s}\big(\underbrace{z^s e^{-z}}_{\to 0} - e^{-1}\big) + \lim_{z\to\infty}\frac{1}{s}\int_1^z x^s e^{-x}\,dx \\
&= -\frac{1}{s\cdot e} + \frac{1}{s}\int_1^\infty x^s e^{-x}\,dx.
\end{aligned}$$

Siis kun $s > 0$, niin

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx &= \int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx \\
&= \left(\frac{1}{s\cdot e} + \frac{1}{s}\int_0^1 x^s e^{-x}\,dx\right) + \left(-\frac{1}{s\cdot e} + \frac{1}{s}\int_1^\infty x^s e^{-x}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s e^{-x}\,dx
\end{aligned}$$

eli

$$\Gamma(s) \;=\; \frac{1}{s}\,\Gamma(s+1)$$

ja edelleen

$$\Gamma(s+1) \;=\; s\,\Gamma(s).$$

Lisäksi[1]

$$\Gamma(1) \;=\; \int_0^\infty e^{-x}\,dx \;=\; \lim_{z\to\infty} \Big/_{0}^{z} - e^{-x} \;=\; \lim_{z\to\infty} -(\overbrace{e^{-z}}^{\to 0} - 1) \;=\; 1,$$

joten

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= 1\cdot 1 = 1, \\ \Gamma(3) &= 2\cdot 1 = 2, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ja yleisesti

$$\Gamma(n+1) \;=\; n! \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

[1]Kun $s = 1$, niin funktiolla $\Gamma(s)$ on täsmällisesti ottaen näennäinen epäoleellisuuspiste pisteessä $x = 0$, sillä funktiota $x^{s-1}e^{-x}$ ei ole tällöin määritelty. Koska funktion arvolla yksittäisessä pisteessä ei ole merkitystä integroinnin kannalta, voidaan tässä olettaa, että $x^{s-1}e^{-x} = e^{-x}$ myös pisteessä $x = 0$.

3 Sarjateorian alkeita

3.1 Määritelmiä

Olkoon (x_n) reaalilukujono. Muodostetaan muodostetaan tämän jonon jäsenistä uusi lukujono (S_n), missä

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1, \\ S_2 &= x_1 + x_2, \\ S_3 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ &\vdots \\ S_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n. \end{aligned}$$

Määritelmä 3.1. Lukujonoa (S_n) sanotaan lukujonon (x_n) jäsenten muodostamaksi *sarjaksi* ja sitä merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{tai} \qquad x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \cdots .$$

Luku x_n on sarjan *n:s termi*, ja S_n on sarjan *n:s osasumma*. Jos raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

on äärellisenä olemassa (ts. osasummien muodostama lukujono (S_n) suppenee), sanotaan, että sarja *suppenee* ja sen summa on S. Tällöin merkitään

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S.$$

Jos raja-arvoa ei ole äärellisenä olemassa, sanotaan sarjan *hajaantuvan*.

Huomautus. Yllä määritelmässä 3.1 merkintä

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

tarkoittaa siis kahta eri asiaa: sekä sarjaa että (suppenevan) sarjan summaa. Sarjan summalla on tietysti arvo vain, kun sarja suppenee.

Huomautus. Ei ole mitenkään oleellista, millä kirjaimella sarjan summausindeksiä merkitään. Sama sarja voidaan ilmoittaa esimerkiksi muodoissa

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{tai} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Tässä monisteessa ovat useimmiten käytössä indeksit k ja n.

Huomautus. Ei myöskään ole oleellista, että sarjan termien indeksointi alkaa ykkösestä. Jos sarjan indeksointi alkaa jostakin kokonaisluvusta p, voidaan vastaavasti määritellä

$$\sum_{k=p}^{\infty} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=p}^{n} x_k.$$

Varsinkin tapaus $p = 0$ esiintyy usein.

Huomautus. Lukujonon raja-arvon perusominaisuuksista seuraa, että sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=p}^{\infty} x_k \quad (p \in \mathbf{Z}_+)$$

suppenevat samanaikaisesti ja niiden supetessa

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k - \sum_{k=p}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{p-1} x_k.$$

On myös syytä korostaa äärellisen summan ja sarjan (eli äärettömän summan) eroa. Äärellisessä summassa

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

yhteenlaskettavien järjestystä voidaan vaihtaa ja summaan voidaan lisätä tai siitä voidaan poistaa sulkuja ilman, että summan arvo muuttuu. Äärellisellä summalla on myös aina yksikäsitteinen arvo.

Sarjan summassa on kuitenkin kyse raja-arvosta, joten edellä mainitut ominaisuudet eivät välttämättä ole voimassa. Esimerkiksi sarjan termien järjestyksen vaihto tai termien ryhmittely sulkuja lisäämällä tai poistamalla voi vaikuttaa sarjan suppenemiseen tai sarjan summan arvoon.

Huomautus 3.1. Suppenevassa sarjassa peräkkäisiä termejä voidaan kuitenkin yhdistellä lisäämällä sarjaan sulkuja, sillä suluttamalla saadun sarjan osasummien jono on alkuperäisen sarjan osasummien jonon osajono. Täten jono suppenee kohti samaa raja-arvoa ja saatu uusi sarja suppenee ja sillä on sama summa kuin alkuperäisellä sarjalla.

Sulkujen poistaminen suppenevasta sarjasta ei sen sijaan ole luvallista. Esimerkiksi sarja

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \;=\; 0+0+0+\cdots$$

suppenee (kukin osasumma on 0), mutta sarja

$$1-1+1-1+1-1+\cdots$$

hajaantuu (ks. esimerkki 3.2).

Esimerkki 3.1. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} \;=\; \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

suppenee ja että sen summa on 1.

Koska

$$\frac{1}{k(k+1)} \;=\; \frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \;=\; 1,$$

joten tarkasteltava sarja suppenee ja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} \;=\; 1.$$

Huomautus. Sarjaa kutsutaan *teleskooppiseksi*, jos sen termit x_k voidaan (kuten esimerkissä 3.1) esittää muodossa

$$x_k = a_k - a_{k+1} \qquad (k \in \mathbf{Z}_+).$$

Kuten esimerkistä 3.1 havaitaan, teleskooppinen sarja suppenee, jos lukujonolla (a_k) on raja-arvo.

Esimerkki 3.2. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

hajaantuu.

Nyt

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{kun } n \text{ on pariton,} \\ 0, & \text{kun } n \text{ on parillinen,} \end{cases}$$

joten raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

ei ole olemassa. Siis sarja hajaantuu.

Esimerkki 3.3 (Harmoninen sarja). Osoitetaan, että *harmoninen sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

hajaantuu.

Olkoon $k \in \mathbf{Z}_+$. Tällöin

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \qquad \forall x \in [k, k+1],$$

joten

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k} \cdot \int_k^{k+1} 1\, dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

Siis

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\, dx = \Big/_{1}^{n+1} \log x = \log(n+1) \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

Siis harmoninen sarja hajaantuu.

Esimerkki 3.4 (Geometrinen sarja). Osoitetaan, että *geometrinen sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} = 1 + q + q^2 + \cdots$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $|q| < 1$, ja että tällöin

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.}$$

Nyt

$$S_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{kun } q \neq 1, \\ n, & \text{kun } q = 1. \end{cases}$$

Jos siis $|q| < 1$, niin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

ja jos $|q| \geq 1$, niin raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ei ole (äärellisenä) olemassa. Täten geometrinen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun $|q| < 1$, ja tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Huomautus. Jos sarjan indeksointi aloitetaan nollasta, törmätään toisinaan epämääräiseen muotoon 0^0. Tällöin *noudatetaan sopimusta*, että sarjan terminä $0^0 = 1$.

Huomautus. Jos $|q| < 1$, niin esimerkin 3.4 nojalla

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{1-(1-q)}{1-q} = \frac{q}{1-q}.$$

Määritelmä 3.2. Jos S_n on sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

n:s osasumma, niin

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k$$

on sarjan *n:s jäännöstermi.*

Huomautus. Sarjan jäännöstermi ei ole hyvin määritelty siinä mielessä, että jos sarja hajaantuu, niin jäännöstermillä ei ole arvoa.

Huomautus. Jäännösterminkään määritettelyssä ei ole oleellista, että sarjan indeksointi alkaa nimenomaan ykkösestä. Jos sarjan indeksointi alkaa jostakin muusta luvusta, on jäännöstermin indeksin alkuarvoa sitten vain muutettava vastaavasti.

Sinänsä ei ole myöskään oleellista, että tarkasteltava jäännöstermi vastaa mimenomaan osasummaa S_n. Esimerkiksi jäännöstermin raja-arvoa tutkittaessa voi joskus olla merkinnällisesti yksinkertaisempaa määritellä jäännöstermi vastaamaan jotakin muuta osasummaa.

Huomautus 3.2. Jos S on suppenevan sarjan summa ja S_n sarjan n:s osasumma, niin

$$R_n = S - S_n.$$

Lisäksi tällöin

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = \lim_{n\to\infty} S - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0.$$

Esimerkki 3.5. Jos $|q| < 1$, niin geometrisen sarjan (ks. esimerkki 3.4)

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

jäännöstermiksi saadaan

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q^n}{1-q}.$$

Huomautus. Koska geometrisen sarjan indeksointi aloitetaan nollasta, niin sarjan n:nnen jäännöstermin indeksointi esimerkissä 3.5 alkaa arvosta n (eikä siis arvosta $n + 1$).

Määritetään luvun 3.1 lopuksi vielä summa kahdelle myöhemminkin esiintyvällä sarjalle. Summia hyödynnetään myöhemmissä esimerkeissä.

Esimerkki 3.6. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

suppenee ja sen summa on $\log 2$ (vrt. esimerkki 4.14, s. 103).

Olkoon

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

sarjan n:s osasumma. Oletetaan lisäksi, että $t \in [0,1]$, ja tarkastellaan geometrista sarjaa, jonka suhdeluku on $-t$. Koska $-t \neq 1$, niin kyseisen geometrisen sarjan n:nneksi osasummaksi saadaan (ks. esimerkki 3.4)

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t}.$$

Täten

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Jos siis $n \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt &= \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k + \frac{(-t)^n}{1+t} \right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 (-t)^k\,dt + \underbrace{\int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt}_{\text{Merk.} = R_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \Big/_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} + R_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1} + R_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} + R_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + R_n \\
&= S_n + R_n.
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt \;=\; \Big/_{0}^{1} \log(1+t) \;=\; \log(1+1) - \log 1 \;=\; \log 2,$$

joten

$$S_n \;=\; \log 2 - R_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Koska

$$\begin{aligned}
|R_n| \;&=\; \left| \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t}\,dt \right| \\
&\leq\; \int_0^1 \left| \frac{(-t)^n}{1+t} \right| dt \\
&=\; \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \\
&\leq\; \int_0^1 t^n\,dt \\
&=\; \Big/_{0}^{1} \frac{t^{n+1}}{n+1} \\
&=\; \frac{1}{n+1} \\
&\to\; 0, \quad \text{kun } n \to \infty,
\end{aligned}$$

niin

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to\infty} (\log 2 - R_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \log 2 \;-\; \lim_{n\to\infty} R_n \;=\; \log 2.$$

Siis tarkasteltava sarja suppenee ja

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \;=\; \log 2.}$$

Esimerkki 3.7. Tutkimalla geometrista summaa, jonka suhdeluku on $-t^2$, voidaan vastaavalla tavalla kuin esimerkissä 3.6 osoittaa (harjoitustehtävä), että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

suppenee ja

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}}$$

(vrt. esimerkki 5.12, s. 120).

3.2 Perustuloksia

Tarkastellaan sitten muutamia sarjojen perusominaisuuksia.

Lause 3.3. *Jos* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee, niin* $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$.

Todistus. Sarjan supetessa osasummien jonoilla (S_n) ja (S_{n-1}) on sama raja-arvo S eli

$$\lim_{n\to\infty} S_n \;=\; \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \;=\; S.$$

Täten

$$\lim_{n\to\infty} x_n \;=\; \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) \;=\; \lim_{n\to\infty} S_n \;-\; \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \;=\; S - S \;=\; 0. \qquad \square$$

Huomautus 3.4. Lause 3.3 ei ole voimassa kääntäen. Esimerkiksi harmoninen sarja hajaantuu (ks. esimerkki 3.3, s. 51), vaikka sen termin raja-arvo on nolla.

Lause 3.3 voidaan esittää myös muodossa, jota voidaan helposti käyttää sarjan hajaantumisen osoittamiseen.

Seuraus 3.5 (Hajaantumistarkastin). *Jos* $\lim_{k\to\infty} x_k \neq 0$, *niin sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu.*

Esimerkki 3.8. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+2}$$

hajaantuu.

Koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}} \;=\; 1 \quad (\neq 0),$$

niin sarja hajaantuu hajaantumistarkastimen nojalla.

Esimerkki 3.9. Vastaavalla tavalla kuin esimerkissä 3.8 voidaan osoittaa, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$$

hajaantuu (harjoitustehtävä).

Lause 3.6. *Olkoon* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = S$, $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = T$ *ja* $c \in \mathbf{R}$. *Tällöin*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot x_k \;=\; c \cdot S,$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k) \;=\; S + T.$

Todistus. Äärellisten summien perusominaisuuksien ja oletusten nojalla

(i) $S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} c \cdot x_k \;=\; c \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \;\to\; c \cdot S$, kun $n \to \infty$,

(ii) $S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \;\to\; S + T$, kun $n \to \infty$. □

Huomautus. Lauseessa 3.6 sarjan summan olemassaolo sisältää tietysti oletuksen (tai väitteen), että sarja suppenee.

Esimerkki 3.10. Koska esimerkin 3.7 (s. 56) perusteella

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \;=\; \arctan 1,$$

niin lauseen 3.6 nojalla

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \;=\; (-1) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \;=\; -\arctan 1 \;=\; \arctan(-1) \;=\; -\frac{\pi}{4}$$

(ja siis molemmat sarjat suppenevat). Vrt. esimerkki 5.12, s. 120.

Esimerkki 3.11. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+2^{k+2}}{3^{k+1}}$$

suppenee, ja määritetään sarjan summa.

Lauseen 3.6 ja geometrisen sarjan suppenemistulosten (esimerkki 3.4, s. 52) nojalla

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^2}{3} \cdot \frac{2^k}{3^k} = \frac{4}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot 3 = 4$$

(ja siis molemmat sarjat suppenevat). Täten lauseen 3.6 nojalla tarkasteltava sarja suppenee ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1+2^{k+2}}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{k+1}} + \frac{2^{k+2}}{3^{k+1}}\right) = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}.$$

Esimerkki 3.12. Lausetta 3.6 käyttäen geometrisen sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

jäännöstermi saadaan sarjan supetessa helposti määritettyä myös käyttämättä sarjan osasummaa (vrt. esimerkki 3.5, s. 53), sillä kun $|q| < 1$, niin

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} q^k = q^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} q^k = q^n \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{q^n}{1-q}.$$

Seuraus 3.7. *Jos $c \neq 0$ ja sarja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

hajaantuu, niin myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot x_k$$

hajaantuu.

Esimerkki 3.13. Sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$$
hajaantuu seurauksen 3.7 nojalla, sillä
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k}$$
ja harmoninen sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
hajaantuu (esimerkki 3.3, s. 51).

Seuraus 3.8. *Jos toinen sarjoista*
$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$
suppenee ja toinen hajaantuu, niin sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)$$
hajaantuu.

Esimerkki 3.14. Osoitetaan, että sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+2}{k(k+1)}$$
hajaantuu.

Koska
$$\frac{k+2}{k(k+1)} = \frac{(k+1)+1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k(k+1)}$$
kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$, niin väite seuraa suoraan seurauksesta 3.8, sillä sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$
suppenee (esimerkki 3.1, s. 50) ja harmoninen sarja
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$
hajaantuu (esimerkki 3.3, s. 51).

Huomautus. Jos sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

molemmat hajaantuvat, niin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k)$$

voi hajaantua tai supeta (ks. esimerkki 3.15).

Esimerkki 3.15. Olkoon

$$x_k = \frac{1}{k} \qquad \text{ja} \qquad y_k = -\frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbf{Z}_+).$$

Tällöin sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

molemmat hajaantuvat (harmoninen sarja; seuraus 3.7). Toisaalta sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} + \left(-\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

suppenee, mutta sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k + x_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$$

hajaantuu (esimerkki 3.13).

Huomautus. Jos sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

molemmat suppenevat, niin sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

ei silti tarvitse supeta (ks. esimerkki 3.16).

Esimerkki 3.16. Myöhemmin esimerkissä 3.30 (s. 80) osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

suppenee. Kuitenkin kertomalla saatu sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k x_k \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

hajaantuu harmonisena sarjana (esimerkki 3.3, s. 51).

Todistetaan vielä luvun 3.2 lopuksi pari sinänsä ilmeistä myöhemmissä todistuksissa tarvittavaa aputulosta.

Lause 3.9. *Jos sarjat*

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad T \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} y_k$$

suppenevat ja

$$x_k \;\le\; y_k \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$$

niin $S \;\le\; T$.

Todistus. Lauseen oletusten perusteella

$$S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} x_k \;\le\; \sum_{k=1}^{n} y_k \;=\; T_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Koska sarjat suppenevat, niin lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla

$$S \;=\; \lim_{n\to\infty} S_n \;\le\; \lim_{n\to\infty} T_n \;=\; T. \qquad \square$$

Seuraus 3.10. *Jos sarjat*

$$S \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} x_k \qquad \text{ja} \qquad T \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

suppenevat, niin $|S| \;\le\; T$.

Todistus. Koska

$$-|x_k| \ \le \ x_k \ \le \ |x_k| \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$$

niin lauseen 3.9 (ja sarjan suppenemisen perusominaisuuksien) nojalla

$$-T \ \le \ S \ \le \ T.$$

Täten väite seuraa itseisarvon perusominaisuuksista. □

Huomautus 3.11. Luvun 3.2 tulokset ovat tietysti voimassa myös, jos sarjan indeksointi alkaa jostakin muusta luvusta kuin 1.

3.3 Positiiviterminen sarja

Positiivitermisellä sarjalla tarkoitetaan sarjaa, jonka termit ovat ei-negatiivisia. Toisin sanoen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

on positiiviterminen, jos $x_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$.

Lause 3.12. *Positiiviterminen sarja suppenee täsmälleen silloin, kun sen osasummien jono (S_n) on ylhäältä rajoitettu.*

Todistus. Positiivitermisen sarjan osasummien jono (S_n) on ilman muuta kasvava. Jos (S_n) on lisäksi ylhäältä rajoitettu, niin raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

on olemassa monotonisten jonojen peruslauseen nojalla, joten sarja suppenee Jos taas (S_n) ei ole ylhäältä rajoitettu, niin

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

joten sarja hajaantuu. □

Positiivitermisille sarjoille on lukuisia suppenemistestejä, joista tässä tarkastellaan muutamaa. Aluksi tarkastellaan integraalitestiä.

3.3.1 Integraalitarkastin

Integraalitestissä tavoitteena on verrata sarjan ja epäoleellisen integraalin suppenemista.

Lause 3.13 (Integraalitarkastin). *Olkoon f sellainen vähenevä funktio, että $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \geq 1$. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ suppenee} \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ suppenee.}$$

Todistus. Koska f on vähenevä, niin

$$f(k) \;\geq\; f(x) \;\geq\; f(k+1) \qquad \forall x \in [k, k+1]$$

kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$. Täten

$$f(k) \;=\; \int\limits_{k}^{k+1} f(k)\,dx \;\geq\; \int\limits_{k}^{k+1} f(x)\,dx \;\geq\; \int\limits_{k}^{k+1} f(k+1)\,dx \;=\; f(k+1) \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+$$

ja edelleen

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \;\geq\; \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \;\geq\; \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \;=\; \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+. \tag{3.1}$$

"$\Leftarrow$": Oletetaan ensiksi, että

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

suppenee. Koska nyt $f(x) \geq 0$, niin

$$S_n \;=\; \sum_{k=1}^{n} f(k) \;=\; f(1) + \sum_{k=2}^{n} f(k) \overset{(3.1)}{\leq} f(1) + \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx \;\leq\; \underbrace{f(1) + \int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx}_{=\text{ vakio}}$$

kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Siis jono (S_n) on ylhäältä rajoitettu, joten sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

suppenee lauseen 3.12 nojalla.

"$\Rightarrow$": Oletetaan sitten, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \;=\; M$$

suppenee. Olkoon $z > 1$ ja $n = \lfloor z \rfloor$. Tällöin $n \leq z < n+1$ ja koska f on ei-negatiivinen, niin

$$\int\limits_{1}^{z} f(x)\,dx \;\leq\; \int\limits_{1}^{n+1} f(x)\,dx \overset{(3.1)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} f(k) \;\leq\; \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \;=\; M.$$

Täten epäoleellinen integraali

$$\int\limits_{1}^{\infty} f(x)\,dx$$

suppenee lauseen 2.30 (s. 29) nojalla. $\square$

Huomautus 3.14. Lauseen 3.13 todistuksesta havaitaan, että sarjan ja sitä vastaavan epäoleellisen integraalin supetessa

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \quad\le\quad \sum_{k=1}^\infty f(k) \quad\le\quad f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx.$$

Huomautus 3.15. Integraalitarkastimessakaan ei ole oleellista, että sarjan summaus aloitetaan indeksin arvosta 1. Tulos pätee tietysti myös muilla aloitusarvoilla k_0, kunhan vain tarkasteltava funktio f on vähenevä ja $f(x) \ge 0$ kaikilla $x \ge k_0$.

Esimerkki 3.17. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n}$$

hajaantuu.

Funktio

$$f(x) \;=\; \frac{1}{x\log x}$$

on vähenevä ja positiivinen, kun $x \ge 2$. Täten integraalitarkastimen nojalla

$$\int_2^\infty f(x)\,dx \text{ suppenee} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{n=2}^\infty f(n) \text{ suppenee.}$$

Koska

$$\lim_{z\to\infty}\int_2^z \frac{1}{x\log x}\,dx \;=\; \lim_{z\to\infty} \Big/_2^z \log(\log x) \;=\; \lim_{z\to\infty}(\overbrace{\log(\log z)}^{\to\infty} - \log(\log 2)) \;=\; \infty,$$

niin sekä integraali

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\log x}\,dx$$

että sarja

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log n}$$

hajaantuvat.

Esimerkki 3.18. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

suppenee, kun $s > 1$, ja hajaantuu, kun $s \leq 1$.

1°: Olkoon $s \leq 0$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^s} = \lim_{n\to\infty} n^{\overbrace{-s}^{\geq 0}} \geq 1 > 0,$$

joten sarja hajaantuu hajaantumistarkastimen nojalla.

2°: Olkoon $s > 0$. Tarkastellaan funktiota

$$f(x) = \frac{1}{x^s},$$

joka on nyt vähenevä ja ≥ 0, kun $x \geq 1$. Lisäksi esimerkin 2.17 (s. 27) nojalla

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx$$

suppenee, kun $s > 1$, ja hajaantuu, kun $s \leq 1$. Täten integraalitarkastimen nojalla sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

suppenee, kun $s > 1$, ja hajaantuu, kun $0 < s \leq 1$.

Väite seuraa nyt kohdista 1° ja 2°.

Huomautus. Esimerkin 3.18 suppenevat sarjat määrittelevät (osin) ns. *Riemannin zeta-funktion*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad (s > 1),$$

jolla on keskeinen rooli *analyyttiseksi lukuteoriaksi* kutsutulla matematiikan osa-alueella.

Huomautus. Jos $s > 1$, niin

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{z\to\infty} \int_1^{z} \frac{1}{x^s}\, dx = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-s} \Big/_{1}^{z} \frac{1}{x^{s-1}} = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{1-s}\left(\frac{1}{z^{s-1}} - 1\right) = \frac{1}{s-1}.$$

Täten huomautuksen 3.14 nojalla saadaan arvio

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1} \qquad (s > 1).$$

3.3.2 Majorantti- ja minoranttiperiaate

Majorantti- ja minoraattiperiaatteissa tarkasteltavaa sarjaa verrataan sarjoihin, joiden tiedetään suppenevan tai hajaantuvan. Periaatteita kutsutaan siksi myös *vertailuperiaatteiksi.*

Lause 3.16 (Majoranttiperiaate). *Jos*

(i) $0 \leq x_k \leq y_k \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *suppenee,*

niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee.*

Todistus. Ehdosta (ii) seuraa, että on olemassa sellainen $T \in \mathbf{R}$, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k = T.$$

Koska ehdon (i) nojalla $y_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$T_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq T \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Täten ehdon (i) nojalla

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n \leq T \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

Siis osasummien jono (S_n) on ylhäältä rajoitettu, joten lauseen 3.12 nojalla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenee. $\square$

Jos $K > 0$, niin sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} y_k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} K \cdot y_k$$

suppenevat samanaikaisesti. Lisäksi sarjan alkupään termeillä ei ole merkitystä sarjan suppenemisen kannalta. Täten majoranttiperiaate voidaan esittää seuraavassa sen käyttöä yksinkertaistavassa muodossa.

Seuraus 3.17 (Majoranttiperiaate). *Jos*

(i) $\exists K > 0$ *ja* $\exists k_0 \in \mathbf{Z}_+$ *siten, että* $0 \leq x_k \leq K \cdot y_k \quad \forall k \geq k_0$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *suppenee,*

niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee.*

Majoranttiperiaatteella voidaan siis osoittaa sarjan suppeneminen. Sarjan hajaantumisen osoittamiseen voidaan vastaavasti käyttää minoranttiperiaatetta, josta esitetään taas kaksi eri muotoilua.

Lause 3.18 (Minoranttiperiaate). *Jos*

(i) $0 \leq y_k \leq x_k \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *hajaantuu,*

niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu.*

Todistus. Jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ suppenisi, niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ suppenisi majoranttiperiaatteen nojalla, missä on ristiriita oletuksen (ii) kanssa. □

Seuraus 3.19 (Minoranttiperiaate). *Jos*

(i) $\exists K > 0$ *ja* $\exists k_0 \in \mathbf{Z}_+$ *siten, että* $0 \leq K \cdot y_k \leq x_k \quad \forall k \geq k_0$,

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ *hajaantuu,*

niin myös sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *hajaantuu.*

Esimerkki 3.19. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 4^k}{3^k + 5^k}$$

suppenee.

1°: Jos $k \in \mathbf{N}$, niin

$$0 \leq \frac{2^k + 4^k}{3^k + 5^k} \leq \frac{4^k + 4^k}{5^k} = 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k.$$

2°: Sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

suppenee, sillä kyseessä on geometrinen sarja (esimerkki 3.4, s. 52), jonka suhdeluvulle $q = \frac{4}{5}$ pätee $|q| < 1$.

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että tarkasteltava sarja suppenee.

Huomautus. Majorantti- ja minoranttiperiaatteita sovellettaessa käytetään vertailusarjana usein esimerkin 3.18 (s. 67) sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

joka suppenee, kun $s > 1$, ja hajaantuu, kun $s \leq 1$. Erikoistapauksena tässä on harmoninen sarja ($s = 1$), joka siis hajaantuu.

Esimerkki 3.20. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+2}$$

hajaantuu.

1°: Jos $n \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$\frac{n+3}{n^2+2} \geq \frac{n}{n^2+2n^2} = \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} \geq 0.$$

2°: Harmoninen sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ hajaantuu.

Kohdista 1° ja 2° seuraa minoranttiperiaatteen nojalla, että tarkasteltava sarja hajaantuu.

Esimerkki 3.21. Vastaavalla tavalla kuin esimerkissä 3.20 voidaan osoittaa, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3-6n}$$

suppenee (harjoitustehtävä).

Esimerkki 3.22. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$$

hajaantuu.

1°: Jos $n \in \mathbf{Z}_+$, niin

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+3}-\sqrt{n} &= \frac{(n+3)-n}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \\
&\geq \frac{3}{\sqrt{n+3n}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{3}{2\sqrt{n}+\sqrt{n}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

2°: Sarja $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ hajaantuu (esimerkki 3.18, s. 67).

Kohdista 1° ja 2° seuraa minoranttiperiaatteen nojalla, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$$

hajaantuu.

Esimerkki 3.23. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{\frac{1}{n^2}} e^{-x^2}\, dx$$

suppenee.

1°: Koska $0 < e^{-x^2} \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$, niin

$$0 \;\leq\; \int_{0}^{\frac{1}{n^2}} e^{-x^2}\, dx \;\leq\; \int_{0}^{\frac{1}{n^2}} 1\, dx \;=\; \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

2°: Sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ suppenee (esimerkki 3.18, s. 67).

Kohdista 1° ja 2° seuraa nyt majoranttiperiaatteen nojalla, että tarkasteltava sarja hajaantuu.

> **Huomautus.** Epäoleellisen integraalin tapaan (ks. huomautus 2.21, s. 20) sopiva majoroiva tai minoroiva sarja voidaan joskus löytää tutkimalla sarjojen termien raja-arvoa.

Esimerkki 3.24. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \tag{3.2}$$

hajaantuu.

Tarkastellaan vertailusarjana harmonista sarjaa. Koska

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \;=\; 1,$$

niin lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen indeksin arvo n_0, että

$$\frac{1}{2} \;\leq\; \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \;\leq\; \frac{3}{2} \qquad \forall n \geq n_0.$$

Täten

$$0 \;<\; \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \;\leq\; \sin \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq n_0.$$

Koska harmoninen sarja hajaantuu, niin minoranttiperiaatteen nojalla myös sarja (3.2) hajaantuu.

3.3.3 Osamäärätarkastin

Osamäärätarkastimessa sarjan suppeneminen pyritään selvittämään tutkimalla kahden peräkkäisen termin suhdetta.

Lause 3.20 (Osamäärätarkastin). *Tarkastellaan sarjaa* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

(i) *Jos olemassa sellainen vakio* L, $0 < L < 1$, *ja sellainen indeksin arvo* $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, *että* $x_k > 0$ *ja*

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq L \qquad \forall k \geq k_0,$$

niin tarkasteltava sarja suppenee.

(ii) *Jos olemassa sellainen vakio* $L \geq 1$ *ja sellainen indeksin arvo* $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, *että* $x_k > 0$ *ja*

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \geq L \qquad \forall k \geq k_0,$$

niin tarkasteltava sarja hajaantuu.

Todistus. (i) 1°: Koska

$$x_k > 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{x_{k+1}}{x_k} \leq L \qquad \forall k \geq k_0,$$

niin

$$x_{k+1} \leq x_k \cdot L \qquad \forall k \geq k_0.$$

Siis

$$0 < x_{k_0+p} \leq x_{k_0+p-1} \cdot L \leq x_{k_0+p-2} \cdot L^2 \leq \cdots \leq x_{k_0} \cdot L^p \qquad \forall p \in \mathbf{N}$$

eli

$$0 < x_{k_0+p} \leq \underbrace{x_{k_0}}_{\text{vakio}} \cdot L^p \qquad \forall p \in \mathbf{N}.$$

2°: Koska $0 < L < 1$, niin geometrinen sarja

$$\sum_{p=0}^{\infty} L^p$$

suppenee.

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että sarja

$$\sum_{p=0}^{\infty} x_{k_0+p}$$

suppenee. Koska sarjan alkupään termeillä ei ole merkitystä sarjan suppenemisen kannalta, myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenee.

(ii) Vastaavalla tavalla kuin kohdassa (i) saadaan (koska $L \geq 1$), että

$$x_{k_0+p} \;\geq\; x_{k_0} \cdot L^p \;\geq\; \underbrace{x_{k_0}}_{\text{vakio}} \;>\; 0 \qquad \forall p \in \mathbf{N}.$$

Siis

$$\lim_{k\to\infty} x_k \;\neq\; 0,$$

joten sarja hajaantuu hajaantumistarkastimen nojalla. □

Huomautus. Lauseen 3.20 kohdassa (i) ei ehdon

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \;\leq\; L \;<\; 1 \qquad \forall k \geq k_0$$

sijasta ei riitä ehto

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \;<\; 1 \qquad \forall k \geq k_0.$$

Esimerkiksi harmoninen sarja toteuttaa jälkimmäisen ehdon, mutta ei suppene.

Esimerkki 3.25. Osoitetaan, että sarja

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^2} + \frac{1}{2^2\cdot 3^3} + \cdots$$

suppenee.

Nyt sarjan k:s termi

$$x_k \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2^p\cdot 3^p}, & \text{kun } k = 2p \ (p \in \mathbf{Z}_+) \text{ eli } k \text{ on parillinen,} \\ \dfrac{1}{2^{p-1}\cdot 3^p}, & \text{kun } k = 2p-1 \ (p \in \mathbf{Z}_+) \text{ eli } k \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Selvästi $x_k > 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$. Kun k on pariton ($k = 2p-1$, $p \in \mathbf{Z}_+$), niin

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \;=\; \frac{x_{2p}}{x_{2p-1}} \;=\; \frac{1}{2^p\cdot 3^p} \Big/ \frac{1}{2^{p-1}\cdot 3^p} \;=\; \frac{2^{p-1}\cdot 3^p}{2^p\cdot 3^p} \;=\; \frac{1}{2},$$

ja kun k on parillinen ($k = 2p$, $p \in \mathbf{Z}_+$), niin

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_{2p+1}}{x_{2p}} = \frac{x_{2(p+1)-1}}{x_{2p}} = \frac{1}{2^{(p+1)-1} \cdot 3^{p+1}} \bigg/ \frac{1}{2^p \cdot 3^p} = \frac{2^p \cdot 3^p}{2^p \cdot 3^{p+1}} = \frac{1}{3}.$$

Täten

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{2} \qquad \text{tai} \qquad \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{1}{3} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+.$$

Siis

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} \leq \frac{1}{2} < 1 \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$$

joten sarja suppenee osamäärätarkastimen nojalla.

Osamäärätarkastimesta käytetään usein muotoa, jossa tutkitaan termien osamäärän raja-arvoa. Tarkastimen raja-arvomuotoa on usein helpompi käyttää, mutta toisaalta perusmuoto on yleisempi, sillä se voi sopia myös tapauksiin, joissa termien osamäärällä ei ole raja-arvoa (ks. esimerkki 3.25).

Lause 3.21 (Osamäärätarkastin). *Oletetaan, että sarja* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *on positiivi-terminen ja termien osamäärällä on raja-arvo*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}}{x_k} = K.$$

Jos $K < 1$, *niin sarja suppenee, ja jos* $K > 1$, *niin sarja hajaantuu.*

Todistus. Olkoon

$$L = \frac{K+1}{2}$$

lukujen K ja 1 keskiarvo.

1°: Oletetaan, että $K < 1$. Tällöin $K < L < 1$ ja lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} < L < 1 \qquad \forall k \geq k_0.$$

Täten sarja suppenee osamäärätarkastimen perusversion nojalla.

2°: Oletetaan, että $K > 1$. Tällöin $K > L > 1$ ja lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} > L > 1 \qquad \forall k \geq k_0.$$

Täten sarja hajaantuu osamäärätarkastimen perusversion nojalla. □

Huomautus. Jos lauseessa 3.21 raja-arvo on 1, niin sarja voi supeta tai hajaantua (ks. esimerkki 3.26).

Esimerkki 3.26. Toinen sarjoista

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

hajaantuu ja toinen suppenee (ks. esimerkki 3.18, s. 67). Kuitenkin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \Big/ \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \Big/ \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1,$$

joten molemmissa sarjoissa termien osamäärän raja-arvo on 1.

Esimerkki 3.27. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

suppenee.

Sarja on selvästi positiiviterminen. Jos x_n on sarjan n:s termi, niin

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \Big/ \frac{(n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{(n+1)! \cdot (n+1)! \cdot (2n)!}{n! \cdot n! \cdot (2n+2)!} \\
&= \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})}{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})} \\
&\to \frac{1}{4}, \quad \text{kun } n \to \infty,
\end{aligned}$$

joten osamäärätarkastimen raja-arvomuodon nojalla sarja suppenee.

Esimerkki 3.28. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{2n}}$$

hajaantuu.

Jos x_n on sarjan n:s termi, niin

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} \Big/ \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)! \cdot 2^{2n}}{n! \cdot 2^{2n+2}} = \frac{n+1}{4} \to \infty, \quad \text{kun } n \to \infty.$$

Siis on olemassa sellainen vakio $L \geq 1$ ja sellainen indeksin arvo $n_0 \in \mathbf{Z}_+$, että $x_n > 0$ ja

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq L \qquad \forall n \geq n_0,$$

joten osamäärätarkastimen nojalla sarja hajaantuu.

Esimerkki 3.29. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

suppenee, kun $x \geq 0$.

1°: Kun $x = 0$, niin sarjan suppeneminen on ilmeistä. Koska sarjan ensimmäinen termi on ykkönen ja muut termit ovat nollia, niin sarjan kaikkien osasummien arvo ja täten myös sarjan summa on 1.

2°: Olkoon $x > 0$. Tällöin sarja on selvästi positiiviterminen ja

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n+1} \cdot n!}{x^n \cdot (n+1)!} = x \cdot \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

joten osamäärätarkastimen raja-arvomuodon nojalla sarja suppenee.

3.4 Vuorotteleva sarja

Olkoon $x_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$. Tällöin sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x_k \;=\; x_1 - x_2 + x_3 - \cdots + (-1)^{k-1}x_k + \cdots$$

sanotaan *vuorottelevaksi sarjaksi.* Vuorottelevan sarjan suppenemista voidaan tutkia esimerkiksi *Leibnizin lauseen* avulla.

Lause 3.22 (Leibnizin lause). *Oletetaan, että*

(i) $x_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+$,

(ii) $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq x_k \geq \cdots$,

(iii) $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0.$

Tällöin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}x_k$$

suppenee. Lisäksi jäännöstermi R_n *on samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi* $(-1)^n x_{n+1}$ *ja*

$$|R_n| \;\leq\; x_{n+1}.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja S_n sarjan n:s osasumma ($n \in \mathbf{Z}_+$). Kun $p \in \mathbf{Z}_+$ ja p on pariton, niin

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= \left|(-1)^n x_{n+1} + (-1)^{n+1}x_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1}x_{n+p}\right| \\
&= |(-1)^n| \cdot |x_{n+1} - x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| \\
&= |\overbrace{(x_{n+1} - x_{n+2})}^{\geq 0} + \cdots + \overbrace{(x_{n+p-2} - x_{n+p-1})}^{\geq 0} + \overbrace{x_{n+p}}^{\geq 0}| \\
&= x_{n+1} - x_{n+2} + \cdots + x_{n+p-2} - x_{n+p-1} + x_{n+p} \\
&= x_{n+1} - \overbrace{(x_{n+2} - x_{n+3})}^{\geq 0} - \cdots - \overbrace{(x_{n+p-1} - x_{n+p})}^{\geq 0} \\
&\leq x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Vastaavasti jos p on parillinen, niin

$$\begin{aligned}
|S_{n+p} - S_n| &= \left|(-1)^n x_{n+1} + (-1)^{n+1} x_{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p-1} x_{n+p}\right| \\
&= |(-1)^n| \cdot |x_{n+1} - x_{n+2} + \cdots - x_{n+p}| \\
&= |\overbrace{(x_{n+1} - x_{n+2})}^{\geq 0} + \cdots + \overbrace{(x_{n+p-1} - x_{n+p})}^{\geq 0}| \\
&= x_{n+1} - x_{n+2} + \cdots + x_{n+p-1} - x_{n+p} \\
&= x_{n+1} - \overbrace{(x_{n+2} - x_{n+3})}^{\geq 0} - \cdots - \overbrace{(x_{n+p-2} - x_{n+p-1})}^{\geq 0} - \overbrace{x_{n+p}}^{\geq 0} \\
&\leq x_{n+1}.
\end{aligned}$$

Siis

$$|S_{n+p} - S_n| \leq x_{n+1} \qquad \forall n, p \in \mathbf{Z}_+.$$

Koska $x_n \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$ ja

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 0,$$

niin lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen rajaluku $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$0 \leq x_{n+1} < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Täten

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon,\ \forall p \in \mathbf{Z}_+.$$

Siis Cauchyn suppenemisehdon nojalla lukujono (S_n) ja samalla myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x_k$$

suppenee.

Tarkastellaan sitten jäännöstermiä R_n ($n \in \mathbf{Z}_+$). Koska sarja suppenee, niin

$$\begin{aligned}
(-1)^n \cdot R_n &= (-1)^n \Big((-1)^n x_{n+1} + (-1)^{n+1} x_{n+2} + (-1)^{n+2} x_{n+3} + \cdots\Big) \\
&= x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+3} - \cdots
\end{aligned}$$

ja edelleen huomautuksen 3.1 (s. 50) nojalla

$$x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+3} - \cdots = \overbrace{x_{n+1} - x_{n+2}}^{\geq 0} + \overbrace{x_{n+3} - x_{n+4}}^{\geq 0} + \cdots \geq 0$$

sekä

$$x_{n+1} - x_{n+2} + x_{n+3} - \cdots \;=\; x_{n+1} \overbrace{- x_{n+2} + x_{n+3}}^{\leq 0} \overbrace{- x_{n+3} + x_{n+4}}^{\leq 0} - \cdots \;\leq\; x_{n+1}.$$

Täten

$$0 \;\leq\; (-1)^n R_n \;\leq\; x_{n+1}.$$

Koska $(-1)^n R_n \geq 0$, niin jäännöstermin R_n on oltava samanmerkkinen kuin ensimmäinen poisjätetty termi $(-1)^n x_{n+1}$. Lisäksi siis

$$|R_n| \;\leq\; x_{n+1}. \qquad \square$$

Huomautus. Leibnizin lausetta sovellettaessa riittää, että lauseen oletukset ovat voimassa indeksin k jostakin arvosta k_0 alkaen. Tällöin tietysti jäännöstermiä koskeva ehto on voimassa vain, kun $k \geq k_0$.

Esimerkki 3.30. Osoitetaan, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \quad \text{suppenee} \quad \Leftrightarrow \quad s > 0.$$

1°: Jos $s > 0$, niin sarja on selvästi vuorotteleva.

2°: Jos $s > 0$, niin n^s on (aidosti) kasvava ja

$$\frac{1}{1} \;>\; \frac{1}{2^s} \;>\; \frac{1}{3^s} \;>\; \cdots \;>\; 0.$$

3°: Jos $s > 0$, niin $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^s} \;=\; 0.$

Kohdista 1° - 3° seuraa nyt Leibnizin lauseen nojalla, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

suppenee, kun $s > 0$.

Jos taas $s \leq 0$, niin raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \;=\; \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \cdot n^{-s}$$

ei ole olemassa. Täten sarja hajaantuu hajaantumistarkastimen nojalla.

Esimerkki 3.31. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{n!}$$

suppenee.

1°: Sarja on vuorotteleva.

2°: Jos $n \in \mathbf{N}$, niin

$$\begin{aligned} \frac{4^n}{n!} \geq \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{(n+1)!}{n!} \geq \frac{4^{n+1}}{4^n} \\ &\Leftrightarrow \quad n+1 \geq 4 \\ &\Leftrightarrow \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{4^n}{n!} \geq \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \geq \frac{4^{n+2}}{(n+2)!} \geq \cdots \geq 0 \qquad \forall n \geq 3,$$

joten Leibnizin lauseen ehto (ii) on voimassa, kun $n \geq n_0 = 3$.

3°: Koska

$$\begin{aligned} 0 < \frac{4^n}{n!} &= \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{n} \\ &\leq \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{32}{3} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} \end{aligned}$$

kaikilla $n \geq 4$, niin

$$\lim_{n \to \infty} \frac{4^n}{n!} = 0.$$

Kohdista 1° - 3° seuraa nyt Leibnizin lauseen nojalla, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{n!}$$

suppenee.

Huomautus. Leibnizin lauseessa termien monotonisuusehto on välttämätön (ks. esimerkki 3.32).

Esimerkki 3.32. Olkoon

$$x_k = \frac{1}{\sqrt{p+1} + (-1)^k},$$

kun $k = 2p$ tai $k = 2p-1$ ($p \in \mathbf{Z}_+$). Osoitetaan, että vuorotteleva sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x_k = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots \tag{3.3}$$

hajaantuu, vaikka Leibnizin lauseen ehdot (i) ja (iii) ovat voimassa.

Selvästi $x_k \geq 0$ kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$ ja

$$\lim_{k\to\infty} x_k = 0.$$

Täten Leibnizin lauseen ehdot (i) ja (iii) ovat voimassa.

Toisaalta harmonisen sarjan osasummana (ks. esimerkki 3.3, s. 51)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to \infty, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

joten myös sarjan (3.3) osasumma

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{\sqrt{k+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}+1} \Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(k+1)-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \\ &= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\to \infty, \quad \text{kun } n \to \infty. \end{aligned}$$

Täten sarjan (3.3) osasummien jono hajaantuu, joten myös sarja (3.3) hajaantuu.

3.5 Itseinen suppeneminen

Tarkastellaan lopuksi vielä lyhyesti sarjan itseistä suppenemista.

Määritelmä 3.3. Sarja $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *suppenee itseisesti*, jos sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ suppenee.

Lause 3.23. *Itseisesti suppeneva sarja suppenee myös tavallisessa mielessä.*

Todistus. Oletetaan, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$$

suppenee. Koska

$$0 \;\leq\; |x_k| - x_k \;\leq\; 2\,|x_k| \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$$

niin majoranttiperiaatteen nojalla myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\, |x_k| - x_k \right)$$

suppenee. Täten myös termit yhdistämällä saatu sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\, |x_k| - \left(\, |x_k| - x_k \right) \Big) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

suppenee. □

Huomautus. Lause 3.23 ei ole voimassa kääntäen (ks. esimerkki 3.34).

Määritelmä 3.4. Sarja *suppenee ehdollisesti*, jos sarja suppenee, mutta ei suppene itseisesti.

Esimerkki 3.33. Sarja
$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$
suppenee itseisesti, kun $|q| < 1$, sillä tällöin sarja
$$\sum_{n=0}^{\infty} |q^n| \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n$$
suppenee (esimerkki 3.4, s. 52).

Esimerkki 3.34. Kun $0 < s \leq 1$, niin sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$
suppenee Leibnizin lauseen nojalla (esimerkki 3.30, s. 80), mutta sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \right| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$
hajaantuu (esimerkki 3.18, s. 67). Täten sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$
suppenee ehdollisesti, kun $0 < s \leq 1$.

Esimerkki 3.35. Osoitetaan, että sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{3n + (-1)^{n-1}}}_{=x_n} \;=\; \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \cdots$$
suppenee ehdollisesti.

Sarja suppenee Leibnizin lauseen nojalla (harjoitustehtävä). Koska
$$|x_n| \;=\; \frac{1}{3n + (-1)^{n-1}} \;\geq\; \frac{1}{3n+1} \;\geq\; \frac{1}{3n+n} \;=\; \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n} \;>\; 0 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+$$
ja harmoninen sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
hajaantuu (esimerkki 3.3, s. 51), niin minoranttiperiaatteen nojalla sarja
$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$
hajaantuu. Täten suppeneminen ei ole itseistä.

Esimerkki 3.36. Vastaavalla tavalla kuin esimerkeissä 3.34 ja 3.35 voidaan osoittaa, että sarja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$$

suppenee ehdollisesti (harjoitustehtävä).

Huomautus. Positiivitermisiä sarjoja koskevat suppenemiskriteerit saattavat olla tehokkaita myös muille sarjoille, kun sovelletaan niitä sarjaan, jossa terminä on alkuperäisen termin itseisarvo.

Esimerkki 3.37. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin n + \cos(n^2)}{n^2}}_{= x_n}$$

suppenee.

1°: Koska

$$0 \;\leq\; \left|\sin n + \cos(n^2)\right| \;\leq\; 2 \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+,$$

niin

$$0 \;\leq\; |x_n| \;\leq\; 2 \cdot \frac{1}{n^2} \qquad \forall n \in \mathbf{Z}_+.$$

2°: Sarja $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ suppenee (esimerkki 3.18, s. 67).

Kohdista 1° ja 2° seuraa majoranttiperiaatteen nojalla, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

suppenee, joten sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n + \cos(n^2)}{n^2}$$

suppenee itseisesti ja siis myös tavallisessa mielessä.

Huom. Sarjan suppenemisen tutkimiseen ei nyt voida käyttää Leibnizin lausetta, sillä sarja ei ole vuorotteleva.

Esimerkki 3.38. Esimerkissä 3.29 (s. 77) osoitettiin, että sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

suppenee, kun $x \geq 0$. Osoitetaan nyt, että sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Olkoon siis $x < 0$ ja $n \in \mathbf{N}$. Jos nyt

$$x_n = \frac{x^n}{n!},$$

niin $|x_n| > 0$ ja

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{|x|^n}{n!} = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{|x|^n \cdot (n+1)!} = |x| \cdot \frac{1}{n+1} \to 0, \quad \text{kun } n \to \infty,$$

joten osamäärätarkastimen nojalla sarja suppenee itseisesti ja samalla tavallisessa mielessä.

Siis sarja suppenee (itseisesti) kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Huomautus. Positiivitermisiä sarjoja koskevat suppenemiskriteerit voidaan joissakin tapauksissa myös suoraan muuntaa muotoon, jossa sarjan termin sijasta tutkitaan termin itseisarvoa.

Tarkastellaan esimerkkinä osamäärätestin raja-arvomuotoa (lause 3.21, s. 75).

Lause 3.24 (Osamäärätarkastin). *Oletetaan, että sarjan*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

termien itseisarvojen osamäärällä on raja-arvo

$$\lim_{k \to \infty} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = K.$$

Jos $K < 1$, niin sarja suppenee, ja jos $K > 1$, niin sarja hajaantuu.

Todistus. 1°: Oletetaan, että $K < 1$. Tällöin sarja suppenee positiivitermisten sarjojen osamäärätarkastimen nojalla itseisesti ja siis myös tavallisessa mielessä.

2°: Oletetaan, että $K > 1$. Olkoon

$$L = \frac{K+1}{2}$$

lukujen K ja 1 keskiarvo. Tällöin $K > L > 1$ ja lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{Z}_+$, että

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} > L > 1 \qquad \forall k \geq k_0.$$

Vastaavalla tavalla (harjoitustehtävä) kuin positiivitermisten sarjojen osamäärätestin (lause 3.20, s. 73) todistuksessa saadaan (koska $L > 1$), että

$$|x_{k_0+p}| > |x_{k_0}| \cdot L^p > \underbrace{|x_{k_0}|}_{\text{vakio}} > 0 \qquad \forall p \in \mathbf{Z}_+.$$

Siis

$$\lim_{k\to\infty} x_k \neq 0,$$

joten sarja hajaantuu hajaantumistarkastimen nojalla. □

Esimerkki 3.39. Tutkitaan sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^k}{(-2)^k \cdot k!}}_{=x_k}$$

suppenemista.

Kun $k \to \infty$, niin

$$\begin{aligned}
\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} &= \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}\cdot(k+1)!} \Big/ \frac{k^k}{2^k \cdot k!} \\
&= \frac{2^k}{2^{k+1}} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\
&\to \frac{1}{2} \cdot e \\
&> 1.
\end{aligned}$$

Siis sarja hajaantuu osamäärätarkastimen (lause 3.24) nojalla.

4 Funktiosarjoista

4.1 Funktiosarjan suppeneminen

Seuraavaksi tarkastellaan sarjoja, joiden termit ovat (lukujen sijasta) jollakin välillä I määriteltyjä funktioita. Täsmällisemmin *funktiosarjalla* (tai lyhyemmin sarjalla) tarkoitetaan funktioista $u_k\colon I \to \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{N}$, muodostettua sarjaa

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

Sarja on tietenkin määritelty välillä I. Sarjan *osasummasta* käytetään merkintää

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x).$$

Osasummaa $S_n(x)$ vastaavasta *jäännöstermistä* käytetään merkintää

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x).$$

Numeeristen sarjojen tapaan nytkään ei ole oleellista, millä kirjaimella sarjan indeksiä merkitään tai aloitetaanko sarjan indeksointi nollasta, ykkösestä tai jostakin muusta kokonaisluvusta. Samaten osasummasta voitaisiin aivan hyvin käyttää merkintää

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

ja jäännöstermistä vastaavasti merkintää

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x).$$

Jos piste $x = 0$ kuuluu sarjan määrittelyväliin ja sarjan indeksointi aloitetaan nollasta, sarjan ensimmäisenä terminä esiintyy myös epämääräinen muoto 0^0. Aiempaan tapaan tällöin *noudatetaan sopimusta*, että sarjan terminä $0^0 = 1$.

Määritelmä 4.1. Funktioista $u_k\colon I \to \mathbf{R}$ muodostettu sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppenee (eli *suppenee pisteittäin* tai tavallisessa mielessä) välillä I kohti summafunktiota $S\colon I \to \mathbf{R}$, jos

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

jokaiselle yksittäiselle pisteelle $x \in I$.

Huomautus 4.1. Sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppenee kohti summafunktiota $S(x)$ välillä I täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) \;=\; S(x)$$

kaikilla $x \in I$.

Huomautus 4.2. Kvanttoreita käyttäen sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppeneminen välillä I tarkoittaa, että

$$\forall x \in I\colon \forall \varepsilon > 0\colon \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ siten, että } |R_n(x)| \;<\; \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Jos sarjan osasumma on $S_n(x)$ ja summa $S(x)$, niin yllä oleva ehto voidaan ilmaista myös muodossa

$$\forall x \in I\colon \forall \varepsilon > 0\colon \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ siten, että } |S_n(x) - S(x)| \;<\; \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Huomautus. Koska sarjan suppeneminen välillä I palautuu sarjan suppenemiseen välin I yksittäisissä pisteissä, luvussa 3 johdetut sarjojen perusominaisuudet ovat voimassa myös välillä I (jos sarja suppenee välillä I). Jos esimerkiksi $c \in \mathbf{R}$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \;=\; S(x) \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x) \;=\; T(x)$$

(ja siis tarkasteltavat sarjat suppenevat) välillä I, niin myös

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\cdot u_k(x) \;=\; c \cdot S(x)$$

ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} (u_k(x) + w_k(x)) \;=\; S(x) + T(x)$$

(ja kyseiset sarjat suppenevat) välillä I (vrt. lause 3.6, s. 58).

Esimerkki 4.1. Esimerkissä 3.4 (s. 52) osoitettiin, että geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

suppenee välillä $I = \,]-1,1[$. Sarjan supetessa

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}.$$

Jos $|x| \geq 1$, niin geometrinen sarja ei suppene vaan hajaantuu.

Esimerkki 4.2. Esimerkissä 3.38 (s. 86) osoitettiin, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Sarjan summa määritetään esimerkissä 4.16 (s. 107).

Esimerkki 4.3. Olkoon $c \in \mathbf{R}$. Tutkitaan, milloin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n}$$

suppenee. Kun $x \neq c$ ja $n \to \infty$, niin

$$\frac{|(x-c)^{n+1}/(n+1)|}{|(x-c)^n/n|} \;=\; \frac{n \cdot |x-c|^{n+1}}{(n+1) \cdot |x-c|^n} \;=\; \frac{n}{n+1} \cdot |x-c| \;\;\to\;\; |x-c|\,.$$

Täten suppenemisen tarkastelu voidaan jakaa seuraaviin tapauksiin.

1°: Jos $x = c$, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} 0 \;=\; 0,$$

joten sarja suppenee.

2°: Jos $0 < |x-c| < 1$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n}$$

suppenee osamäärätarkastimen (itseisen suppenemisen version) nojalla.

3°: Jos $|x-c| > 1$, niin sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n}$$

hajaantuu osamäärätarkastimen (itseisen suppenemisen version) nojalla.

4°: Jos $x - c = 1$, niin

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

joten sarja hajaantuu (esimerkki 3.3, s. 51).

5°: Jos $x - c = -1$, niin kyseessä on vuorotteleva sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

joka suppenee Leibnizin lauseen nojalla (esimerkki 3.30, s. 80).

Kohdista 1° - 5° seuraa, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n}$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $x - c \in [-1, 1[$ eli $x \in [c-1, c+1[$.

Esimerkki 4.4. Koska

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k},$$

niin esimerkin 4.3 nojalla sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $-x \in [-1, 1[$ eli kun $x \in]-1, 1]$. Sarjan summa määritetään esimerkissä 4.14 (s. 103).

Esimerkki 4.5. Vastaavalla tavalla kuin esimerkissä 4.3 voidaan osoittaa, että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2\, 2^{2n}}$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $x \in [-2, 6]$ (harjoitustehtävä).

4.2 Sarjan tasainen suppeneminen

Olisi mukavaa, jos funktiosarjan termien ominaisuudet (esimerkiksi jatkuvuus, derivoituvuus ja integroituvuus) periytyisivät sarjan supetessa sarjan summafunktiolle. Yleisesti näin ei kuitenkaan välttämättä tapahdu (ks. esimerkki 4.13, s. 100). Siksi on tarpeen tutkia sarjan pisteittäistä suppenemista vahvempaa ominaisuutta.

Määritelmä 4.2. Sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppenee tasaisesti välillä I, jos

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ siten, että } |R_n(x)| \;<\; \varepsilon \quad \forall x \in I,\ \forall n > n_\varepsilon,$$

missä $R_n(x)$ on sarjan jäännöstermi (ks. s. 88).

Huomautus 4.3. Jos sarjan osasumma on $S_n(x)$ ja summa $S(x)$, niin määritelmän 4.2 ehto voidaan ilmaista myös muodossa

$$\forall \varepsilon > 0\colon \exists n_\varepsilon \in \mathbf{N} \text{ siten, että } |S_n(x) - S(x)| \;<\; \varepsilon \quad \forall x \in I,\ \forall n > n_\varepsilon.$$

Huomautus 4.4. Sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

ei suppene tasaisesti välillä I, jos

$$\exists \varepsilon > 0\colon \forall n_\varepsilon \in \mathbf{N}\colon \exists x \in I\colon \exists n > n_\varepsilon \text{ siten, että } |R_n(x)| \;\geq\; \varepsilon$$

eli jos

$$\exists \varepsilon > 0\colon \forall n_\varepsilon \in \mathbf{N}\colon \exists x \in I\colon \exists n > n_\varepsilon \text{ siten, että } |S_n(x) - S(x)| \;\geq\; \varepsilon,$$

missä $S_n(x)$ on sarjan osasumma ja $S(x)$ sarjan summa.

Huomautus 4.5. Jos sarja suppenee tasaisesti välillä I, se suppenee tasaisesti myös jokaisella välin I osavälillä.

Huomautus. Jos sarja suppenee tasaisesti välillä I, se suppenee myös pisteittäin välillä I.

Huomautus. Jos funktiosarja ei suppene jossakin välin I pisteessä, sarja ei tietenkään suppene tasaisesti (eikä myöskään pisteittäin) välillä I.

Huomautus 4.6. Olkoon $c \in \mathbf{R}$. Jos sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x)$$

suppenevat tasaisesti välillä I, myös sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot u_k(x) \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (u_k(x) + w_k(x))$$

suppenevat tasaisesti välillä I (harjoitustehtävä).

Esimerkki 4.6. Osoitetaan, että geometrinen sarja (ks. esimerkki 4.1, s. 90)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}$$

suppenee tasaisesti jokaisella välin $]-1,1[$ suljetulla osavälillä $[a,b]$.

Valitaan (mielivaltainen) $\varepsilon > 0$. Merkitään

$$c = \max\{|a|, |b|\},$$

jolloin $0 < c < 1$. Hyödyntämällä geometrisen sarjan summakaavaa saadaan jäännöstermille arvio (vrt. esimerkki 3.12, s. 59)

$$R_n(x) \;=\; \sum_{k=n}^{\infty} x^k \;=\; x^n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; x^n \cdot \frac{1}{1-x} \;=\; \frac{x^n}{1-x} \qquad \forall x \in \,]-1,1[\,.$$

Täten

$$|R_n(x)| \;=\; \left|\frac{x^n}{1-x}\right| \;=\; \frac{1}{1-x}\cdot|x|^n \;\leq\; \frac{1}{1-c}\cdot c^n \qquad \forall x\in[a,b]\,.$$

Lisäksi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-c}\cdot c^n \;=\; 0,$$

joten on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$, että

$$\frac{1}{1-c}\cdot c^n \;<\; \varepsilon \qquad \forall n > n_\varepsilon.$$

Täten

$$|R_n(x)| \;<\; \varepsilon \qquad \forall x\in[a,b]\,,\quad \forall n>n_\varepsilon.$$

Siis sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

suppenee tasaisesti välillä $[a,b]$.

Esimerkki 4.7. Osoitetaan, että geometrinen sarja (ks. esimerkki 4.1, s. 90)

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}$$

ei suppene tasaisesti välillä $I = \,]-1,1[$.

Valitaan $\varepsilon = 1$. Olkoon $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ mielivaltainen ja $n > n_\varepsilon$ jokin joukon $\mathbf{Z}_+$ alkio. Olkoon lisäksi

$$z \;=\; \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; \sqrt[n]{\tfrac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{\sqrt[n]{2}}\,.$$

Tällöin $z \in I$ sekä

$$\tfrac{1}{2} \;\leq\; z \;<\; 1 \qquad \text{ja} \qquad z^n \;=\; \tfrac{1}{2}.$$

Täten esimerkin 4.6 nojalla

$$|R_n(z)| \;=\; \left|\frac{z^n}{1-z}\right| \;=\; \frac{1}{1-z}\cdot z^n \;\geq\; 2\cdot\frac{1}{2} \;=\; 1.$$

Siis sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

ei suppene tasaisesti välillä I.

Esimerkki 4.8. Olkoon $a > 0$. Tällöin sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$$

suppenee tasaisesti välillä $I = [a, \infty[$ (harjoitustehtävä). **Huom.** Jos $a \leq 1$, niin piste $x = 1$ kuuluu väliin I. Tällöin

$$\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k^x} \right| = \frac{1}{k},$$

joten tasaista suppenemista ei voi osoittaa *Weierstrassin M-testiä* (ks. lause 4.8) käyttäen. Tehtävä on siis ratkaistava suoraan määritelmää käyttäen eli arvioimalla sarjan jäännöstermiä.

Huomautus 4.7. Esimerkistä 4.8 nähdään, että sarjan tasainen suppeneminen ei takaa, että sarja suppenisi itseisesti.

Sarjan tasaisen suppenemisen tutkiminen suoraan määritelmään perustuen on melko hankalaa. Seuraavaksi esitettävä Weierstrassin M-testi tarjoaa joskus helpon tavan osoittaa, että sarja suppenee tasaisesti. Testiä ei kuitenkaan voi käyttää sen osoittamiseen, että sarja ei suppene tasaisesti.

Weierstrassin M-testissä tarkasteltavan sarjan termejä majoroidaan jonkin suppenevan numeerisen sarjan termeillä. Tällöin myös tarkasteltavan sarjan jäännöstermiä voidaan arvioida koko välillä tämän yhden suppenevan numeerisen sarjan jäännöstermillä. Koska numeerisen sarjan jäännöstermi lähestyy suppenemisen vuoksi nollaa termien lukumäärän kasvaessa, saadaan riittävä arvio myös tarkasteltavan funktiosarjan jäännöstermille (vrt. esimerkki 4.6, s. 93).

Lause 4.8 (Weierstrassin M-testi). *Olkoot $M_0, M_1, M_2, \ldots$ ei-negatiivisia reaalilukuja ja I jokin reaalilukuväli. Jos*

(i) $\exists k_0 \in \mathbf{N}$ *siten, että* $|u_k(x)| \leq M_k \quad \forall x \in I, \quad \forall k > k_0,$

(ii) *sarja* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ *suppenee,*

niin sarja $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ *suppenee tasaisesti välillä I.*

Todistus. Valitaan (mielivaltainen) $\varepsilon > 0$, ja oletetaan, että $n > k_0$. Lauseen oletusten ja majoranttiperiaatteen nojalla sarjat

$$\sum_{k=n}^{\infty} M_k, \quad \sum_{k=n}^{\infty} |u_k(x)| \quad \text{ja} \quad \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)$$

suppenevat kaikilla $x \in I$. Käyttämällä seurausta 3.10 (s. 62) sekä oletusta (i) ja lausetta 3.9 (s. 62) saadaan nyt

$$|R_n(x)| \;=\; \left|\sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right| \;\leq\; \sum_{k=n}^{\infty} |u_k(x)| \;\leq\; \sum_{k=n}^{\infty} M_k$$

kaikilla $x \in I$.

Lisäksi oletuksen (ii) perusteella (huomautus 3.2, s. 53)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} M_k \;=\; 0,$$

joten lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa sellainen $n_0 \in \mathbf{N}$, että

$$\sum_{k=n}^{\infty} M_k \;<\; \varepsilon \qquad \forall n > n_0.$$

Täten

$$|R_n(x)| \;\leq\; \sum_{k=n}^{\infty} M_k \;<\; \varepsilon$$

aina, kun $n > n_\varepsilon = \max\{k_0, n_0\}$ ja $x \in I$. Siis sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppenee tasaisesti välillä I. □

Huomautus 4.9. Weierstrassin M-testin nojalla myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} |u_k(x)|$$

suppenee tasaisesti välillä I.

Esimerkki 4.9. Osoitetaan, että jos $s > 1$, niin sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^s} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^s}$$

suppenevat tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$.

Olkoon $s > 1$. Tällöin

1°: $\left|\dfrac{\sin(kx)}{k^s}\right| \leq \dfrac{1}{k^s}$ ja $\left|\dfrac{\cos(kx)}{k^s}\right| \leq \dfrac{1}{k^s} \qquad \forall x \in \mathbf{R}, \quad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$

2°: sarja $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ suppenee (esimerkki 3.18, s. 67).

Siis sarjat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^s} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^s}$$

suppenevat Weierstrassin M-testin nojalla tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$.

Esimerkki 4.10. Käyttämällä Weierstrassin M-testiä voidaan osoittaa, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-x)x^k}{k}$$

suppenee tasaisesti välillä $[0, 1]$ (harjoitustehtävä).

Esimerkki 4.11. Osoitetaan, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

suppenee tasaisesti jokaisella äärellisellä välillä $[a, b]$.

Käytetään majoranttisarjana välin $[a, b]$ päätepisteessä saatavaa sarjaa. Olkoon siis $c = \max\{|a|, |b|\}$. Tällöin

1°: $\left|\dfrac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{c^k}{k!} \qquad \forall x \in [a, b], \quad \forall k \in \mathbf{N},$

2°: sarja $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!}$ suppenee (esimerkki 3.38, s. 86).

Täten sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$ Weierstrassin M-testin nojalla.

Esimerkki 4.12. Vastaavasti kuin esimerkissä 4.11 voidaan osoittaa, että sarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

suppenevat tasaisesti jokaisella äärellisellä välillä $[a, b]$ (harjoitustehtävä).

4.3 Tasaisen suppenemisen seurauksia

4.3.1 Summafunktion jatkuvuus

Osoitetaan seuraavaksi, että vaikka sarjan supetessa sarjan termien jatkuvuus jollakin välillä ei välttämättä periydy sarjan summafunktiolle, näin tapahtuu, jos sarjan suppeneminen on tasaista.

Lause 4.10. *Jos välillä I tasaisesti suppenevan sarjan termit ovat jatkuvia välillä I, myös sarjan summafunktio on jatkuva välillä I.*

Todistus. Todistetaan jatkuvuus tapauksessa, jossa tarkasteltava piste on välin I sisäpiste. Tapaukset, joissa kyseessä on (esimerkiksi suljetun) välin päätepiste, todistetaan vastaavasti (harjoitustehtävä).[1]

Olkoon siis $a \in I$ välin I sisäpiste. Valitaan (mielivaltainen) $\varepsilon > 0$. Olkoon lisäksi $S_n(x)$ tasaisesti suppenevan sarjan osasumma ja $S(x)$ summa (välillä I).

Koska sarja suppenee tasaisesti välillä I, huomautuksen 4.3 (s. 92) nojalla on olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall x \in I, \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

Olkoon nyt $n > n_\varepsilon$. Koska sarjan termit ovat jatkuvia välillä I, sarjan (äärellinen) osasumma $S_n(x)$ on jatkuva pisteessä $x = a$. Täten jatkuvuuden määritelmän nojalla on olemassa sellainen $\delta > 0$, että[2]

$$|S_n(x) - S_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ aina, kun } |x - a| < \delta.$$

Jos siis $|x - a| < \delta$ (ja $x \in I$), niin

$$\begin{aligned}
|S(x) - S(a)| &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(a) + S_n(a) - S(a)| \\
&\overset{\Delta\text{-ey}}{\leq} \underbrace{|S(x) - S_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S_n(x) - S_n(a)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|S_n(a) - S(a)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Siis funktio $S(x)$ on jatkuva pisteessä $x = a$. Koska a oli mielivaltainen välin I piste, niin S on jatkuva välillä I. □

[1] Tällöin on tarkasteltava vasemmalta tai oikealta jatkuvuutta.

[2] Todistuksen yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa luvun δ olevan niin pieni, että jos $|x - a| < \delta$, niin $x \in I$.

Huomautus. Sarjan summafunktio voi tietenkin olla jatkuva välillä I, vaikka sarjan suppeneminen ei olisikaan tasaista välillä I (ks. esimerkki 4.7, s. 94).

Seuraus 4.11. *Jos sarjan termit ovat jatkuvia välillä I, mutta sarjan summafunktio ei ole jatkuva välillä I, niin sarja ei suppene tasaisesti välillä I.*

Esimerkki 4.13. Tutkitaan sarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)x^k$$

tasaista suppenemista välillä $[-1,1]$.

Koska

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)x^k \;=\; (1-x^2)\sum_{k=0}^{\infty}x^k,$$

niin geometrisen sarjan suppenemisen nojalla tarkasteltava sarja suppenee (pisteittäin) ja

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)x^k \;=\; (1-x^2)\cdot\frac{1}{1-x} \;=\; 1+x$$

kaikilla $x \in \,]-1,1[$. Lisäksi sarja suppenee, kun $x=\pm 1$, sillä tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}0 \;=\; 0.$$

Siis sarja suppenee välillä $[-1,1]$ ja

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)x^k \;=\; \begin{cases} x+1, & \text{kun } |x|<1, \\ 0, & \text{kun } |x|=1. \end{cases}$$

Nyt sarjan termit ovat jatkuvia välillä $[-1,1]$. Sarjan summafunktio sen sijaan ei ole (vasemmalta) jatkuva pisteessä $x=1$. Täten seurauksen 4.11 nojalla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)x^k$$

ei suppene tasaisesti välillä $[-1,1]$.

4.3.2 Sarjan integrointi

Osoitetaan sitten, että funktiosarja voidaan integroida termeittäin, jos sarja suppenee tasaisesti ja sarjan termit ovat jatkuvia.

Lause 4.12. *Oletetaan, että*

(i) *funktiot u_k ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ (kaikilla $k \in \mathbf{N}$),*

(ii) *sarja $S(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ suppenee tasaisesti välillä $[a,b]$.*

Tällöin termit $u_k(x)$ integroimalla muodostettu sarja suppenee ja

$$\int_a^b \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\right)}_{=S(x)} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx.$$

Todistus. Valitaan (mielivaltainen) $\varepsilon > 0$, ja merkitään

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k(x), \qquad n \in \mathbf{Z}_+.$$

Koska funktiot u_k ovat jatkuvia ja sarjan suppeneminen on tasaista välillä $[a,b]$, niin lauseen 4.10 (s. 99) nojalla summafunktio S on jatkuva ja siten myös integroituva välillä $[a,b]$. Myös sarjan yksittäiset termit ja osasummafunktiot S_n ($n \in \mathbf{Z}_+$) ovat jatkuvina funktioina integroituvia välillä $[a,b]$.

Koska sarja suppenee tasaisesti välillä $[a,b]$, on huomautuksen 4.3 (s. 92) nojalla olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbf{Z}_+$, että

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall x \in [a,b]\,,\ \forall n > n_\varepsilon.$$

Jos siis $n > n_\varepsilon$, niin

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b S_n(x)\,dx - \int_a^b S(x)\,dx\right| &= \left|\int_a^b (S_n(x) - S(x))\,dx\right| \\ &\le \int_a^b |S_n(x) - S(x)|\,dx\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Siis lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla

$$
\lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx = \int_a^b S(x)\,dx \tag{4.1}
$$

ja edelleen

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^b u_k(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k(x) \right) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n(x)\,dx \\
&\overset{(4.1)}{=} \int_a^b S(x)\,dx \\
&= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right) dx.
\end{aligned}
$$

□

Seuraus 4.13. *Oletetaan, että $c \in I$ ja*

(i) *funktiot u_k ovat jatkuvia välillä I (kaikilla $k \in \mathbf{N}$),*

(ii) *sarja $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)$ suppenee tasaisesti välillä I.*

Tällöin yhtälön (4.2) oikealla puolella oleva sarja suppenee ja

$$
\int_c^x S(t)\,dt = \int_c^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_c^x u_k(t)\,dt \tag{4.2}
$$

kaikilla $x \in I$.

Huomautus. Yhtälö (4.2) ei välttämättä päde (mutta voi päteä), jos sarjan suppeneminen ei ole tasaista.

Esimerkki 4.14. Osoitetaan, että

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k} \;=\; \log(1+x) \qquad \forall x \in \,]-1,1]\,.}$$

Esimerkin 3.6 (s. 54) nojalla väite pätee, kun $x = 1$. Tarkastellaan siis avointa väliä $]-1,1[$. Otetaan lähtökohdaksi geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k \;=\; \frac{1}{1+t}, \qquad t \in \,]-1,1[\,,$$

ja integroidaan sarja termeittäin. Sarja suppenee tarkasteltavalla välillä, mutta suppeneminen ei ole tasaista koko välillä (esimerkki 4.7, s. 94). Sen sijaan välillä $[-a,a]$, missä $0 < a < 1$, suppeneminen on tasaista (esimerkki 4.6, s. 93).

Olkoon nyt $x \in [-a,a]$. Koska tarkasteltavan geometrisen sarjan termit ovat jatkuvia välillä $]-1,1[$, niin seurauksen 4.13 nojalla

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \;&=\; \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-t)^k \right) dt \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-t)^k \, dt \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Big/_{\!0}^{\,x} \frac{t^{k+1}}{k+1} \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{k+1}}{k+1}.
\end{aligned}$$

Toisaalta

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\, dt \;=\; \Big/_{\!0}^{\,x} \log(1+t) \;=\; \log(1+x) - \log 1 \;=\; \log(1+x),$$

joten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\, x^k}{k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{k+1}}{k+1} \;=\; \log(1+x). \tag{4.3}$$

Koska $0 < a < 1$ ja $x \in [-a,a]$ olivat mielivaltaisia, yhtälö (4.3) pätee kaikilla $x \in \,]-1,1[$ ja samalla siis koko välillä $]-1,1]$.

Esimerkki 4.15. Lasketaan sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}$$

summa.

Alauksi havaitaan, että

$$\frac{1}{k2^k} = \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \Big/_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{k} \cdot x^k = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\, dx.$$

Edelleen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

suppenee tasaisesti välillä $[0, \frac{1}{2}]$ (esimerkki 4.6, s. 93) ja termit x^{k-1} $(k \in \mathbf{Z}_+)$ ovat jatkuvia välillä $[0, \frac{1}{2}]$. Täten lauseen 4.12 perusteella

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} x^{k-1}\, dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}\right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right) dx \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x}\, dx \\
&= \Big/_{0}^{\frac{1}{2}} -\log(1-x) \\
&= -\log\tfrac{1}{2} + \log 1 \\
&= \log 2.
\end{aligned}$$

Huomautus 4.14. Jos esimerkin 4.14 tulos oletetaan tunnetuksi, esimerkin 4.15 tulos voidaan laskea suoraan

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^k\,(\frac{1}{2})^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\,(-\frac{1}{2})^k}{k} \\
&= -\log(1+(-\tfrac{1}{2})) = -\log\tfrac{1}{2} = \log 2.
\end{aligned}$$

4.3.3 Sarjan derivointi

Tarkastellaan sitten sarjan derivointia termeittäin jollakin välillä. Nyt sarjan tasainen suppeneminen ei voi olla riittävä ehto sille, että sarjan summafunktio on derivoituva ja summafunktion derivaatta on sarjan termit derivoimalla muodostetun sarjan summafunktio. Esimerkiksi sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$$

suppenee tasaisesti joukossa $\mathbf{R}$ (esimerkki 4.9, s. 97), mutta sarjan termit derivoimalla muodostettu sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k}$$

hajaantuu harmonisena sarjana esimerkiksi pisteessä $x = 0$.

Riittävä ehto on nyt derivoimalla saadun sarjan tasainen suppeneminen. Itse sarjasta riittää olettaa tasaisen suppenemisen sijasta suppeneminen pelkästään yhdessä tarkasteltavan välin pisteessä.

Lause 4.15. *Oletetaan, että*

(i) *funktiot u_k ja u_k' ovat jatkuvia välillä I (kaikilla $k \in \mathbf{N}$),*

(ii) *sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(c)$ suppenee ainakin yhdessä pisteessä $c \in I$,*

(iii) *sarja $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k'(x)$ suppenee tasaisesti välillä I.*

Tällöin sarja

$$S(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$$

suppenee (pisteittäin) kaikilla $x \in I$ ja sarjan summafunktio S on derivoituva välillä I sekä

$$S'(x) \;=\; \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x) \qquad \forall x \in I.$$

Todistus. Lauseen 4.10 (s. 99) nojalla funktio

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x)$$

on jatkuva ja siten integroituva välillä I. Olkoon nyt $x \in I$. Merkitään

$$F(x) \;=\; \int_c^x f(t)\,dt.$$

Tällöin seurauksen 4.13 (s. 102) nojalla

$$\begin{aligned} F(x) \;=\; \int_c^x f(t)\,dt \;&=\; \int_c^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(t) \right) dt \\ &=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_c^x u_k'(t)\,dt \\ &=\; \sum_{k=0}^{\infty} \Big/_{\!c}^{\,x} u_k(t) \\ &=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_k(x) - u_k(c) \right). \end{aligned}$$

Siis sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(u_k(x) - u_k(c) \right)$$

suppenee (koska sen summafunktio on $F(x)$). Täten myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_k(x) - u_k(c) + u_k(c) \right) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left(u_k(x) - u_k(c) \right) \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k(c)$$

suppenee kahden suppenevan sarjan summana (lause 3.6, s. 58). Lisäksi

$$S(x) \;=\; F(x) + S(c).$$

Koska f on lauseen 4.10 (s. 99) nojalla jatkuva välillä I, niin F on lauseen 1.2 (s. 1) nojalla derivoituva välillä I ja

$$F'(x) \;=\; \frac{d}{dx} \int_c^x f(t)\,dt \;=\; f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x)$$

kaikilla $x \in I$. Täten myös S on derivoituva välillä I ja

$$S'(x) \;=\; \frac{d}{dx} \left(F(x) + S(c) \right) \;=\; F'(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x)$$

kaikilla $x \in I$. $\square$

Esimerkki 4.16. Sarja

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (esimerkki 4.2, s. 90). Määritetään sarjan summafunktio f.

Merkitään

$$u_k(x) \;=\; \frac{x^k}{k!} \qquad (k \in \mathbf{N}).$$

Koska $u_0'(x) = 0$ ja

$$u_k'(x) \;=\; k \cdot \frac{x^{k-1}}{k!} \;=\; \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$$

niin

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x) \;=\; 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \tag{4.4}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Siis sarja ja siitä termit derivoimalla saatu sarja ovat sama sarja. Esimerkin 4.11 (s. 97) nojalla tämä sarja suppenee tasaisesti jokaisella äärellisellä välillä $[a, b]$.

Koska lisäksi termit $u_k(x)$ ja $u_k'(x)$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $k \in \mathbf{N}$, niin lauseen 4.15 nojalla

$$f'(x) \;=\; \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k'(x) \;\overset{(4.4)}{=}\; \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \;=\; f(x)$$

jokaisella äärellisellä välillä $[a, b]$. Täten

$$f'(x) \;=\; f(x) \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Koska

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)e^{-x}\right) \;=\; \big(\overbrace{f'(x) - f(x)}^{=0}\big)\, e^{-x} \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

niin integraalilaskennan peruslauseen nojalla on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että

$$f(x)e^{-x} \;=\; C \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Siis

$$f(x) \;=\; C \cdot e^x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Koska $f(0) = 1$, niin $C = 1$. Täten

$$\boxed{f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \;=\; e^x \qquad \forall x \in \mathbf{R}.}$$

Huomautus. Siis

$$\boxed{e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbf{R}.}$$

5 Potenssisarjoista

5.1 Määritelmä

Olkoot $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reaalisia vakioita ja $c \in \mathbf{R}$.

Määritelmä 5.1. Muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k \;=\; a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \cdots$$

olevaa sarjaa sanotaan c-keskiseksi *potenssisarjaksi*.

Nytkään ei tietenkään ole merkitystä, merkitäänkö potenssisarjan summausindeksiä kirjaimella k vai jollakin muulla kirjaimella, esimerkiksi kirjaimella n. Osa vakioista $a_0, a_1, a_2, \ldots$ voi olla myös nollia, jolloin merkintöjä voidaan joskus yksinkertaistaa jättämällä kyseiset termit merkitsemättä (ks. esimerkit 5.3 ja 5.5 sekä huomautus 5.1).

Selvästi jokainen potenssisarja suppenee (vakioiden $a_0, a_1, a_2, \ldots$ arvoista riippumatta) pisteessä $x = c$. On myös mahdollista, että piste $x = c$ on ainoa piste, jossa potenssisarja suppenee (ks. esimerkki 5.1). Toisaalta potenssisarja voi supeta koko reaalilukujoukossa (ks. esimerkki 5.2) tai sitten jollakin äärellisellä välillä (ks. muut esimerkit ja luku 5.2).

Esimerkki 5.1. Osamäärätarkastimen nojalla potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\,(x-c)^k$$

suppenee vain, kun $x = c$. Jos nimittäin $x \neq c$, niin

$$\frac{\left|(k+1)!\,(x-c)^{k+1}\right|}{|k!\,(x-c)^k|} \;=\; (k+1)\cdot|x-c| \;\;\to\;\; \infty,$$

kun $k \to \infty$.

Esimerkki 5.2. Potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (esimerkki 4.2, s. 90).

Esimerkki 5.3. Esimerkin 4.3 (s. 90) perusteella potenssisarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-c)^n}{n}$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $x \in [c-1, c+1[$.

Esimerkki 5.4. Olkoon $A \neq 0$. Geometrisen sarjan (esimerkki 4.1, s. 90) suppenemisesta seuraa, että potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} A(x-c)^k \;=\; A \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (x-c)^k$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $|x-c| < 1$ eli kun $x \in \,]c-1, c+1[$. Jos erityisesti $A = 1$ ja $c = 0$, kyseessä on potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

eli tavallinen geometrinen sarja. Tämä suppenee, kun $x \in \,]-1, 1[$.

Esimerkki 5.5. Käyttämällä osamäärätarkastinta ja Leibnizin lausetta voidaan osoittaa, että potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

suppenee täsmälleen silloin, kun $x \in [-1, 1]$ (harjoitustehtävä).

Huomautus 5.1. Kun esimerkin 5.5 sarjan suppenemista tutkitaan esimerkiksi osamäärätestillä, kyseessä on sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

missä

$$a_k \;=\; \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \qquad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Potenssisarjana ajateltuna kyseessä on kuitenkin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

missä

$$a_n \;=\; \begin{cases} 0, & \text{kun } n = 2k \ (k \in \mathbf{N}) \text{ eli } n \text{ on parillinen,} \\ \dfrac{(-1)^k}{2k+1}, & \text{kun } n = 2k+1 \ (k \in \mathbf{N}) \text{ eli } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Kuten jo alussa todettiin, potenssisarja suppenee joko yhdessä pisteessä tai sitten jollakin välillä (joka voi olla koko reaalilukujoukko).

Lause 5.2. *Jos potenssisarja suppenee pisteessä $x_1 \neq c$, niin sarja suppenee (vieläpä itseisesti) myös välillä*

$$\Big\{x \in \mathbf{R} \;\Big|\; |x-c| < r\Big\} \;=\;]c-r, c+r[\,,$$

missä $r = |x_1 - c|$.

Todistus. Oletetaan, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_1 - c)^k$$

suppenee ja $x_1 \neq c$. Koska suppenevan sarjan termit ovat rajoitettuja, on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|a_k|\, r^k \;=\; \Big|a_k(x_1-c)^k\Big| \;\leq\; M \qquad \forall k \in \mathbf{N}$$

eli

$$|a_k| \;\leq\; \frac{M}{r^k} \qquad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Siis

$$\Big|a_k(x-c)^k\Big| \;\leq\; \frac{M}{r^k} \cdot |x-c|^k \;=\; M \cdot \left(\frac{|x-c|}{r}\right)^k \qquad \forall x \in \mathbf{R} \;\; \forall k \in \mathbf{N}.$$

Täten sarja

$$\Big|a_k(x-c)^k\Big| \;\leq\; M \qquad \forall k \in \mathbf{N}$$

suppenee itseisesti majoranttiperiaatteen nojalla, kun $|x-c| < r$ (majoranttina suppeneva geometrinen sarja). □

Seuraus 5.3. *Jos sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_1 - c)^k$$

hajaantuu ja $|x-c| \;>\; |x_1 - c| \;\; (= r)$, myös sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k$$

hajaantuu.

5.2 Potenssisarjan suppenemissäde ja -väli

Luvun 5.1 esimerkeistä ja tuloksista havaitaan, että yleisesti potenssisarja näyttäisi suppenevan jollakin välillä (tai vain pisteessä $x = c$). Tarkastellaan nyt asiaa täsmällisemmin.

Määritelmä 5.2. Jos joukko

$$S = \left\{ |x-c| \;\middle|\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \text{ suppenee} \right\}$$

on ylhäältä rajoitettu, niin potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

suppenemissäde $R = \sup S$. Jos joukko S ei ole ylhäältä rajoitettu, niin $R = \infty$.

Lauseen 5.2 nojalla saadaan välittömästi seuraavat tulokset (harjoitustehtävä).

Lause 5.4. *Potenssisarjan suppenemissäteellä R on seuraavat ominaisuudet.*

(i) *Jos $R = 0$, niin sarja suppenee vain, kun $x = c$.*

(ii) *Jos $R = \infty$, niin sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$.*

(iii) *Jos $0 < R < \infty$, niin sarja suppenee, kun $|x-c| < R$, ja sarja hajaantuu, kun $|x-c| > R$.*

Huomautus 5.5. Jos $0 < R < \infty$, niin lauseen 5.4 kohdan (iii) perusteella potenssisarja suppenee välillä $]c-R, c+R[$. Kyseistä väliä kutsutaan potenssisarjan *suppenemisväliksi*. Jos $R = 0$, niin potenssisarjan suppenemisväli surkastuu pisteeksi c, ja jos $R = \infty$, niin suppenemisväli on koko reaalilukujoukko.

Huomautus 5.6. Suppenemisvälin päätepisteissä $c - R$ ja $c + R$ potenssisarja voi supeta tai hajaantua (ks. esimerkki 5.7, s. 113).[1]

[1] Joskus potenssisarjan suppenemisvälillä tarkoitetaan väliä, joka sisältää nyt määritellyn suppenemisvälin (eli avoimen välin) lisäksi myös välin päätepisteet tai päätepisteen, jos potenssisarja suppenee kyseisissä pisteissä.

Huomautus 5.7. Potenssisarjan suppeneminen ja itseinen suppeneminen ovat yhtäpitäviä muualla paitsi mahdollisesti pisteissä $c - R$ ja $c + R$.

Esimerkki 5.6. Esimerkin 5.1 (s. 109) potenssisarjan suppenemissäde on 0 ja esimerkin 5.2 (s. 109) potenssisarjan suppenemissäde on ∞.

Esimerkki 5.7. Esimerkkien 5.3 (s. 110), 5.4 (s. 110) ja 5.5 (s. 110) jokaisen potenssisarjan suppenemissäde on 1.

Suppenemisvälin päätepisteissä esimerkkien 5.3 - 5.5 sarjat kuitenkin käyttäytyvät eri tavalla. Esimerkin 5.4 potenssisarja hajaantuu suppenemisvälin molemmissa päätepisteissä, esimerkin 5.5 sarja suppenee suppenemisvälin molemmissa päätepisteissä ja esimerkin 5.3 sarja suppenee toisessa päätepisteessä ja hajaantuu toisessa päätepisteessä.

Jos potenssisarjan kertoimet ovat itseisarvoltaan pienempiä tai yhtäsuuria kuin jonkin toisen potenssisarjan kertoimet, niin potenssisarjojen suppenemissäteet ovat käänteisessä järjestyksessä. Tämä nähdään seuraavasta lauseesta.

Lause 5.8. *Olkoot R_1 ja R_2 (järjestyksessä) potenssisarjojen*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-c)^k$$

suppenemissäteet. Jos on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{N}$, että

$$|a_k| \leq |b_k| \qquad \forall k > k_0, \tag{5.1}$$

niin $R_1 \geq R_2$.

Todistus. Olkoon x_1 jokin välin $]c - R_2, c + R_2[$ piste. Tällöin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x_1-c)^k$$

suppenee itseisesti. Ehdosta (5.1) seuraa täten majoranttiperiaatteen nojalla, että myös sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k(x_1-c)^k$$

suppenee itseisesti. Siis sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

suppenee kaikissa välin $]c-R_2, c+R_2[$ pisteissä. Täten $R_1 \geq R_2$. $\square$

Huomautus 5.9. Olkoon $M > 0$, $m > 0$ ja R potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

suppenemissäde. Jos on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{N}$, että

(i) $|a_k| \leq M$ kaikilla $k > k_0$, niin $R \geq 1$,

(ii) $|a_k| \geq m$ kaikilla $k > k_0$, niin $R \leq 1$,

(iii) $m \leq |a_k| \leq M$ kaikilla $k > k_0$, niin $R = 1$.

Todistus. Väite seuraa suoraan lauseesta 5.8, sillä esimerkin 5.4 (s. 110) perusteella potenssisarjat

$$\sum_{k=0}^{\infty} m(x-c)^k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} M(x-c)^k$$

molemmat suppenevat täsmälleen silloin, kun $|x-c| < 1$, joten kummankin sarjan suppenemissäde on yksi. $\square$

Esimerkki 5.8. Määritetään potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

suppenemissäde R, kun tiedetään, että $\lim_{k\to\infty} a_k = 3$.

Koska

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 3,$$

niin lukujonon raja-arvon perusominaisuuksien nojalla on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbf{N}$, että

$$2 \leq a_k \leq 4 \qquad \forall k > k_0.$$

Täten huomautuksen 5.9 kohdan (iii) nojalla $R = 1$.

Seuraava lause antaa käyttökelpoisen ja usein helpon tavan määrittää potenssisarjan suppenemissäde.

Lause 5.10. *Jos*

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = A \qquad (0 \le A < \infty \textit{ tai } A = \infty),$$

niin potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

suppenemissäde $R = A$.

Todistus. Jos $x = c$, niin tarkasteltava potenssisarja suppenee. Jos taas $x \neq c$, niin

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|a_{k+1}(x-c)^{k+1}\right|}{\left|a_k(x-c)^k\right|} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-c| = \frac{1}{A}\cdot|x-c|\,, \tag{5.2}$$

joten sarjan suppenemista voidaan tutkia osamäärätarkastinta käyttäen.

1°: Jos $A = 0$ ja $x \neq c$, niin raja-arvo (5.2) on ääretön. Täten sarja hajaantuu, kun $x \neq c$. Siis $R = A$ $(= 0)$.

2°: Jos $A = \infty$, niin raja-arvo (5.2) on nolla. Täten sarja suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Siis $R = A$ $(= \infty)$.

3°: Jos $0 < A < \infty$, niin sarja suppenee, kun

$$\frac{1}{A}\cdot|x-c| < 1 \qquad \text{eli} \qquad |x-c| < A,$$

ja hajaantuu, kun

$$\frac{1}{A}\cdot|x-c| > 1 \qquad \text{eli} \qquad |x-c| > A.$$

Siis $R = A$. □

Huomautus. Lause 5.10 ei ole voimassa kääntäen, sillä lauseessa vaadittava raja-arvo ei välttämättä ole olemassa (ks. esimerkki 5.11).

Esimerkki 5.9. Määritetään potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,x^k$$

suppenemissäde R.

Koska

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{k+1}{(k+1)+1}\right| \;=\; \lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k+2} \;=\; 1,$$

niin lauseen 5.10 nojalla $R = 1$. Suppenemisvälin päätepisteissä $x = \pm 1$ sarja hajaantuu hajaantumistarkastimen nojalla, joten sarja suppenee täsmälleen silloin, kun $|x| < 1$.

Esimerkki 5.10. Määritetään potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\,x^n$$

suppenemissäde R.

Kun $n \to \infty$, niin

$$\begin{aligned}\left|\frac{n!\,/\,n^n}{(n+1)!\,/\,(n+1)^{n+1}}\right| \;&=\; \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\\ &=\; \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(n+1)}\\ &=\; \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\ &=\; \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\ &\to\; e.\end{aligned}$$

Täten $R = e$ lauseen 5.10 nojalla. Sarja siis suppenee, kun $|x| < e$, ja hajaantuu, kun $|x| > e$.

Suppenemissäde ei kuitenkaan kerro mitään sarjan suppenemisesta pisteissä $x = \pm\, e$, joten näissä pisteissä suppeneminen on tutkittava erikseen.

Esimerkki 5.11. Oletetaan, että $n^2 \leq a_n \leq n^4$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$. Määritetään potenssisarjan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

suppenemissäde R.

Olkoot R_2 ja R_4 (järjestyksessä) potenssisarjojen

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n \qquad \text{ja} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$$

suppenemissäteet. Koska $n^2 \leq a_n \leq n^4$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}_+$, niin lauseen 5.8 nojalla

$$R_2 \;\geq\; R \;\geq\; R_4.$$

Toisaalta

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} \;=\; 1 \qquad \text{ja} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{(n+1)^4} \;=\; 1,$$

joten lauseen 5.10 nojalla $R_2 = R_4 = 1$. Siis $R = 1$.

Huomautus. Lauseen 5.10 käytössä on kuitenkin oltava huolellinen. Koska

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^k}{2^{k+1}} \right| \;=\; \frac{1}{2},$$

niin varomaton lauseen 5.10 käyttö antaa esimerkiksi potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^{2k}$$

suppenemissäteeksi virheellisesti $R = \frac{1}{2}$.

Potenssisarjana ajateltuna kyseessä on kuitenkin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

missä

$$a_n \;=\; \begin{cases} 2^k, & \text{kun } n = 2k \ (k \in \mathbf{N}) \text{ eli } n \text{ on parillinen,} \\ 0, & \text{kun } n = 2k+1 \ (k \in \mathbf{N}) \text{ eli } n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Täten joka toinen sarjan termi on nolla ja peräkkäisten termien osamäärän raja-arvoa ei voida tutkia. Näin ollen sarjan suppenemissädettä ei voida määrittää lausetta 5.10 käyttäen.

Osamäärätarkastinta käyttäen sarjan suppenemissäteeksi saadaan $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (harjoitustehtävä).

5.3 Potenssisarjan määrittelemä funktio

Tutkitaan seuraavaksi potenssisarjan summafunktiota. Potenssisarjan suppenemisominaisuuksista seuraa, että potenssisarjan summafunktio on määritelty jollakin välillä (tai mahdollisesti vain yhdessä pisteessä).

Luvussa 4 osoitettiin, että jos funktiosarja suppenee tasaisesti jollakin välillä, sarjan termien jatkuvuus ja integroituvuus periytyvät sarjan summafunktiolle. Siksi aloitetaan osoittamalla, että potenssisarja suppenee aina tasaisesti jokaisella suppenemisvälin suljetulla osavälillä. Seurauksena saadaan sitten välittömästi summafunktion jatkuvuutta ja integroituvuutta koskevat tulokset.

Lause 5.11. *Olkoon*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

potenssisarja, jonka suppenemissäde $R > 0$. *Tällöin sarja suppenee tasaisesti jokaisella välillä* $I_r = [c-r, c+r]$, *missä* $0 < r < R$.

Todistus. Koska

$$\left|a_k(x-c)^k\right| \;=\; |a_k| \cdot |x-c|^k \;\leq\; |a_k| \cdot r^k \qquad \forall x \in I_r \;\text{ ja }\; \forall k \in \mathbf{N}$$

ja sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, r^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k((c+r)-c)^k\right|$$

suppenee (huomautus 5.7, s. 113), niin Weierstrassin M-testin (lause 4.8, s. 95) nojalla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

suppenee tasaisesti välillä I_r. □

Lause 5.12. *Olkoon*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

potenssisarja, jonka suppenemissäde $R > 0$. *Tällöin sarja määrittelee koko suppenemisvälillä* $]c-R, c+R[$ *jatkuvan funktion* f.

Todistus. Sarjan termit $a_k(x-c)^k$ ovat jatkuvia kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $k \in \mathbf{N}$, joten lauseen 4.10 (s. 99) nojalla myös sarjan summafunktio f on jatkuva jokaisella lauseen 5.11 välillä I_r. Koska r voi olla mielivaltaisen lähellä lukua R, summafunktio on jatkuva koko välillä $]c-R, c+R[$. □

Lause 5.13. *Potenssisarja*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

voidaan integroida termeittäin jokaisella sarjan suppenemisvälin $]c-R, c+R[$ $(R > 0)$ *suljetulla osavälillä* $[a, b]$ *eli termit integroimalla muodostettu sarja suppenee ja*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b a_k(x-c)^k\,dx.$$

Todistus. Lauseen 5.11 nojalla sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

suppenee tasaisesti välillä $[a, b]$. Koska sarjan termit ovat lisäksi jatkuvia välillä $[a, b]$, väite seuraa lauseesta 4.12 (s. 101). □

Koska potenssisarjan termit voidaan helposti integroida, lauseen 5.13 tulos saadaan muotoon

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \Big/_a^b (x-c)^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}\Big((b-c)^{k+1} - (a-c)^{k+1}\Big).$$

Valitsemalla yllä $a = c$ ja $b = x$ saadaan termeittäin integrointia koskevalle tulokselle seuraava muoto.

Seuraus 5.14. *Olkoon*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

potenssisarja, jonka suppenemissäde $R > 0$. *Jos* $x \in]c-R, c+R[$, *niin*

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}(x-c)^{k+1}.$$

Esimerkki 5.12. Osoitetaan, että

$$\boxed{\arctan x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} \qquad \forall x \in [-1,1]\,.}$$

Esimerkkien 3.7 (s. 56) ja 3.10 (s. 58) perusteella väite pätee välin päätepisteissä $x = 1$ ja $x = -1$. Tarkastellaan siis avointa väliä $]-1,1[$. Otetaan lähtökohdaksi potenssisarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k \;=\; \frac{1}{1+t^2},$$

jonka suppenemisväli on geometrisena sarjana $]-1,1[$. Täten lauseen 5.13 perusteella

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \;&=\; \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \right) dt \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k t^{2k}\,dt \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Big/_{\!0}^{\,x} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \,]-1,1[$. Toisaalta

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \;=\; \Big/_{\!0}^{\,x} \arctan t \;=\; \arctan x$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$, joten

$$\arctan x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} \qquad \forall x \in \,]-1,1[\,.$$

Siis väite pätee koko välillä $[-1,1]$. Kun $|x| > 1$, väite ei tietenkään päde, sillä sarja hajaantuu (ks. esimerkki 5.5, s. 110).

Tarkastellaan sitten potenssisarjojen derivointia termeittäin. Aluksi osoitetaan, että jos muodostetaan uusi sarja derivoimalla jonkin potenssisarjan termit, tuloksena on potenssisarja, jolla on sama suppenemissäde kuin alkuperäisellä potenssisarjalla.

Lause 5.15. *Potenssisarjoilla*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1}$$

on sama suppenemissäde.

Todistus. Olkoot R_1 ja R_2 (järjestyksessä) sarjojen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \qquad \text{ja} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1}$$

suppenemissäteet. Koska

$$|a_k| \le |k a_k| \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+,$$

niin lauseen 5.8 (s. 113) nojalla $R_1 \ge R_2$.

Osoitetaan sitten, että $R_1 \le R_2$. Olkoon $0 < r < R_1$. Tällöin sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

suppenee pisteessä $x = c + r$. Koska suppenevan sarjan termit ovat rajoitettuja, on olemassa sellainen $M > 0$, että

$$|a_k|\, r^k = \left| a_k((c+r)-c)^k \right| \le M \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+$$

eli

$$|a_k| \le \frac{M}{r^k} \qquad \forall k \in \mathbf{Z}_+.$$

Siis

$$\left| k a_k (x-c)^{k-1} \right| \le k \cdot \frac{M}{r^k} \cdot |x-c|^{k-1} = \frac{Mk}{r} \cdot \left| \frac{x-c}{r} \right|^{k-1}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $k \in \mathbf{Z}_+$. Edelleen sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Mk}{r} \cdot \left| \frac{x-c}{r} \right|^{k-1} = \frac{M}{r} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left| \frac{x-c}{r} \right|^{k-1} = \frac{M}{r} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left| \frac{x-c}{r} \right|^{k}$$

suppenee (esimerkki 5.9, s. 116) aina, kun $\left|\frac{x-c}{r}\right| < 1$ eli $|x-c| < r$.

Täten sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x-c)^{k-1}$$

suppenee majoranttiperiaatteen nojalla aina, kun $|x-c| < r$. Siis sarja suppenee kaikilla $x \in \,]c-r, c+r[$, joten $R_2 \ge r$. Koska r voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua R_1, niin $R_2 \ge R_1$ ja edelleen $R_1 = R_2$. $\square$

Seuraus 5.16. *Jos sarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

integroidaan termeittäin (yli välin $[c,x]$), niin saadulla sarjalla on sama suppenemissäde kuin alkuperäisellä sarjalla.

Huomautus. Termeittäin derivoimalla tai integroimalla saadun sarjan suppenemisesta suppenemisvälin päätepisteissä $c-R$ ja $c+R$ edellä olevat tulokset eivät kerro mitään.

Lause 5.17. *Potenssisarja*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

voidaan derivoida termeittäin jokaisessa suppenemisvälinsä $]c-R, c+R[$ $(R>0)$ pisteessä eli

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-c)^{k-1} \qquad \forall x \in \,]c-R, c+R[\,. \tag{5.3}$$

Todistus. Jokaisella välillä $I_r = [c-r, c+r]$, missä $0 < r < R$, on voimassa

1°: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ suppenee (sillä $r < R$),

2°: $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k(x-c)^{k-1}$ suppenee tasaisesti (lause 5.11 ja lause 5.15),

3°: termit $a_k(x-c)^k$ $(k \in \mathbf{N})$ ja $k a_k(x-c)^{k-1}$ $(k \in \mathbf{Z}_+)$ ovat jatkuvia.

Täten sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

voidaan lauseen 4.15 (s. 105) nojalla derivoida termeittäin ja yhtälö (5.3) on voimassa jokaisella välillä I_r. Koska r voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua R, niin

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$$

voidaan derivoida termeittäin koko välillä $]c-R, c+R[$ ja yhtälö (5.3) on voimassa kaikilla $x \in \,]c-R, c+R[$. $\square$

Esimerkki 5.13. Määritetään sarjan

$$f(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

summa välillä $]-1,1[$. Esimerkin 5.3 (s. 110) nojalla sarjan suppenemissäde $R = 1$. Täten

$$f'(x) \;=\; \frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\cdot x^{k-1}}{k} \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x}$$

kaikilla $x \in \,]-1,1[$. Koska myös

$$D(-\log(1-x)) \;=\; \frac{1}{1-x},$$

niin integraalilaskennan peruslauseen nojalla on olemassa sellainen $C \in \mathbf{R}$, että

$$f(x) \;=\; -\log(1-x) + C$$

kaikilla $x \in \,]-1,1[$. Koska $f(0) = 0$, niin $C = 0$ ja

$$f(x) \;=\; -\log(1-x)$$

kaikilla $x \in \,]-1,1[$.

Seuraus 5.18. *Potenssisarjan*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

summafunktiolla $S(x)$ *on sarjan suppenemisvälillä* $]c-R, c+R[$ $(R > 0)$ *kaikkien kertalukujen derivaatat ja*

$$S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot\,\cdots\,\cdot(k-(n-1))\cdot a_k\cdot(x-c)^{k-n} \tag{5.4}$$

kaikilla $x \in \,]c-R, c+R[$.

Huomautus 5.19. Potenssisarjan

$$S(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

summafunktion derivaatat $S^{(n)}(x)$ ovat sarjan suppenemisvälillä tietenkin myös jatkuvia.

Jos yhtälössä (5.4) erityisesti $x = c$, niin summalausekkeen muut termit kuin $k = n$ ovat nollia. Täten

$$S^{(n)}(c) \;=\; n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-(n-1)) \cdot a_n \;=\; n! \cdot a_n$$

eli

$$a_n \;=\; \frac{1}{n!} \cdot S^{(n)}(c)$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Siis

$$\boxed{S(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k \qquad \forall x \in \,]c-R, c+R[\,.}$$

Näin on tullut todistetuksi seuraus 5.20.

Seuraus 5.20. *Jos funktio f voidaan esittää välillä $]c-h, c+h[$ $(h > 0)$ potenssisarjana*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k,$$

niin tämä esitys on yksikäsitteinen ja

$$a_k \;=\; \frac{f^{(k)}(c)}{k!}$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$.

Lause 5.21 (Yksikäsitteisyyslause). *Jos jollakin välillä $]c-h, c+h[$ $(h > 0)$ on voimassa*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x-c)^k,$$

niin $a_k = b_k$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$.

Todistus. Jos potenssisarjojen yhteinen summafunktio välillä $]c-h, c+h[$ on $S(x)$, niin seurauksen 5.20 nojalla

$$a_k \;=\; \frac{S^{(k)}(c)}{k!} \;=\; b_k$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$. □

5.4 Taylorin sarja

Tähän asti funktiosarjoja tutkittaessa pääasiallisena tavoitteena on ollut määrittää sarjojen summafunktioita. Seuraavaksi tarkastellaan käänteistä tehtävää eli etsitään potenssisarjaa, jonka summafunktio on jokin haluttu funktio.

5.4.1 Taylorin polynomi

Ennen varsinaista tarkastelua esitetään yksi käyttökelpoinen aputulos, jonka avulla pystytään mahdollisesti arvioimaan löydetyn potenssisarjan virhetermiä.

Lause 5.22 (Taylorin lause). *Jos funktio f ja sen derivaatat $f', f'', \dots, f^{(n)}$ ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja derivaatta $f^{(n+1)}$ on olemassa välillä $]a,b[$, niin on olemassa sellainen $\xi \in \,]a,b[$, että*

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(b-a)^{n+1}.$$

Todistus. Merkitään

$$F(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,(b-x)^k$$

ja

$$g(x) \;=\; (b-x)^{n+1},$$

jolloin

$$\begin{aligned}
F'(x) \;&=\; \frac{d}{dx}\left(f(x) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\,(b-x)^k\right)\\
&=\; f'(x) \;+\; \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}\,(b-x)^k \;-\; \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}\,(b-x)^{k-1}\right)\\
&=\; \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}\,(b-x)^n
\end{aligned}$$

ja

$$g'(x) \;=\; -(n+1)(b-x)^n.$$

Lauseen oletusten nojalla funktiot $g(x)$ ja $F(x)$ ovat jatkuvia välillä $[a,b]$ ja derivoituvia välillä $]a,b[$. Täten (differentiaalilaskennan) yleistetyn väliarvolauseen nojalla on olemassa sellainen $\xi \in \,]a,b[$, että

$$F'(\xi)\,[g(b) - g(a)] \;=\; g'(\xi)\,[F(b) - F(a)] \tag{5.5}$$

eli

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n \cdot [g(b)-g(a)] \;=\; -(n+1)(b-\xi)^n \cdot [F(b)-F(a)].$$

Siis

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot [g(b)-g(a)] \;=\; -(n+1) \cdot [F(b)-F(a)]$$

sekä edelleen

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot [g(b)-g(a)] \;=\; -[F(b)-F(a)]$$

ja

$$F(b) \;=\; F(a) \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot [g(a)-g(b)].$$

Koska $F(b) = f(b)$,

$$F(a) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k$$

ja

$$g(a)-g(b) \;=\; (b-a)^{n+1} - 0 \;=\; (b-a)^{n+1},$$

niin

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

□

Jos $b < a$ ja Taylorin lauseen oletukset ovat voimassa väleillä $[b, a]$ ja $]b, a[$, niin Taylorin lauseen todistuksessa $\xi \in\,]b, a[$ ja yhtälö (5.5) korvautuu yhtälöllä

$$F'(\xi)[g(a)-g(b)] \;=\; g'(\xi)[F(a)-F(b)],$$

joka on yhtäpitävä yhtälön (5.5) kanssa. Täten voidaan esittää seuraava huomautus.

Huomautus 5.23. Taylorin lause on voimassa myös, kun $b < a$. Tällöin tietysti $\xi \in\,]b, a[$ ja lauseen oletuksia on tarkasteltava väleillä $[b, a]$ ja $]b, a[$.

Taylorin lauseen oletuksia tarkasteltaessa havaitaan, että jos derivaatta $f^{(n)}$ ($n \in \mathbf{Z}_+$) on jatkuva välillä $[a, b]$, myös derivaatat $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ ovat jatkuvia välillä $[a, b]$. Muutenhan derivaattaa $f^{(n)}$ ei voitaisi muodostaa. Täten olisi riittänyt olettaa pelkästään derivaatan $f^{(n)}$ jatkuvuus. Jos vastaavasti derivaatta $f^{(n+1)}$ on olemassa jollakin välillä I, niin derivaattojen $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ on oltava jatkuvia välillä I. Näin ollen voidaan esittää seuraava Taylorin lauseen seuraus.

Seuraus 5.24. *Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteen c jossakin ympäristössä I ja $x \in I$ $(x \neq c)$, niin on olemassa sellainen $\xi \in\,]c, x[$ (tai $\xi \in\,]x, c[$, jos $x < c$), että*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \tag{5.6}$$

Todistus. Sovelletaan Taylorin lausetta välillä $[c, x]$ (tai $[x, c]$). □

Huomautus 5.25. Jos $x = c$, niin yhtälö (5.6) on voimassa kaikilla luvun ξ arvoilla, sillä

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(c-c)^k \;+\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(c-c)^{n+1} \;=\; \frac{f^{(0)}(c)}{0!} \;+\; 0 \;=\; f(c).$$

Määritelmä 5.3. Yhtälössä (5.6) esiintyvää summaa

$$T_n(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k$$

kutsutaan funktion $f(x)$ *Taylorin polynomiksi* pisteessä c. Jos erityisesti $c = 0$, niin polynomia kutsutaan funktion $f(x)$ *Maclaurinin polynomiksi.*

Taylorin polynomia käyttäen seuraukselle 5.24 saadaan jonkin verran selkeämpi esitysmuoto.

Huomautus 5.26. Jos funktio f on $n+1$ kertaa derivoituva pisteen c jossakin ympäristössä I ja $x \in I$ $(x \neq c)$, niin on olemassa sellainen $\xi \in\,]c, x[$ (tai $\xi \in\,]x, c[$, jos $x < c$), että

$$f(x) \;=\; T_n(x) + R_n(x),$$

missä

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-c)^{n+1}.$$

Taylorin lauseessa arvio jäännöstermille saatiin differentiaalilaskennan yleistettyä väliarvolausetta käyttäen. Käyttämällä osittaisintegrointia voidaan helposti todistaa (induktiolla, harjoitustehtävä) Taylorin lauseen jäännöstermille täsmällinen esitys (= huomautus 5.27). Tällöin on oletettava myös derivaatan $f^{(n+1)}$ jatkuvuus.

Huomautus 5.27. Jos funktio f ja sen derivaatat $f', f'', \ldots, f^{(n+1)}$ ovat jatkuvia pisteen c jossakin ympäristössä I ja $x \in I$, niin

$$f(x) \;=\; T_n(x) + R_n(x),$$

missä

$$R_n(x) \;=\; \frac{1}{n!}\int_c^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt.$$

Esimerkki 5.14. Muodostetaan funktion

$$f(x) \;=\; \log(1+x)$$

Taylorin polynomi pisteessä $c = 0$ (eli funktion Maclaurinin polynomi).

Funktiolla $f(x) = \log(1+x)$ on selvästi kaikkien kertalukujen (jatkuvat) derivaatat, kun $x > -1$. Olkoon siis $x > -1$. Derivoimalla funktio muutamia kertoja havaitaan, että

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},\\
f''(x) &= (-1)\cdot(1+x)^{-2},\\
f'''(x) &= (-1)(-2)\cdot(1+x)^{-3},\\
f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)\cdot(1+x)^{-4},\\
&\;\vdots
\end{aligned}$$

Induktiolla voidaan nyt helposti todistaa, että

$$f^{(k)}(x) \;=\; (-1)^{k-1}\cdot(k-1)!\cdot(1+x)^{-k} \;=\; \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \qquad \forall k \geq 1,$$

joten

$$f^{(k)}(0) \;=\; (-1)^{k-1}(k-1)! \qquad \forall k \geq 1.$$

Koska $f(0) = 0$, niin funktion f Maclaurinin polynomi on

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \\
&= f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \\
&= 0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}\, x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k
\end{aligned}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Jos $n = 0$, niin yllä $T_0(x) = 0$.

Lisäksi huomautuksien 5.27 ja 5.26 nojalla ($x > -1, n \in \mathbf{N}$)

$$\log(1 + x) = T_n(x) + R_n(x),$$

missä

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\, dt \\
&= \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\,(x-t)^n\, dt \\
&= (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt
\end{aligned}$$

tai (jos $x \neq 0$)

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \\
&= \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!}\, x^{n+1} \\
&= \frac{(-1)^n}{(n+1)\,(1+\xi)^{n+1}}\, x^{n+1},
\end{aligned}$$

missä $\xi \in \,]0, x[$ (tai $\xi \in \,]x, 0[$, jos $x < 0$).

5.4.2 Taylorin sarja

Tarkastellaan sitten varsinaista tehtävää eli etsitään potenssisarjaa, jonka summafunktio on haluttu funktio f. Lähtökohdan tarjoaa seuraus 5.20 (s. 124), sillä jos funktiolla $f(x)$ on välillä $]c-h, c+h[$ $(h>0)$ potenssisarjakehitelmä

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k,$$

niin seurauksen 5.20 nojalla

$$a_k \;=\; \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

Siis etsitty potenssisarja on

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k,} \tag{5.7}$$

jota nyt tutkitaan tarkemmin.

Määritelmä 5.4. Sarjaa (5.7) kutsutaan funktion $f(x)$ *Taylorin sarjaksi* (tai *sarjakehitelmäksi)* pisteessä c. Jos Taylorin sarjassa $c=0$, niin sarjaa kutsutaan funktion $f(x)$ *Maclaurinin sarjaksi.*

Funktion $f(x)$ Taylorin sarja voidaan muodostaa pisteessä c silloin, kun $f^{(k)}(c)$ on olemassa kaikilla $k \in \mathbf{N}$ eli funktiolla f on pisteessä c kaikkien kertalukujen derivaatat. Tällöin derivaatat $f^{(k)}(x)$ ovat olemassa (ja ne ovat jatkuvia) myös jollakin välillä $]c-h, c+h[$ $(h>0)$, sillä $f^{(k+1)}(c)$ voidaan muodostaa vain, jos derivaatta $f^{(k)}(c)$ on määritelty pisteen c jossakin ympäristössä.

Funktion $f(x)$ pisteessä c muodostetun Taylorin sarjan summa ei välttämättä ole $f(x)$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Ensinnäkin sarja voi hajaantua muuttujan x joillakin arvoilla. Toisaalta on mahdollista, että vaikka sarja suppenee jollakin välillä I, niin sarjan summa ei ole $f(x)$ välillä I (ks. esimerkki 5.23, s. 136).

Pisteessä $x=c$ sarjan summa on aina $f(c)$, sillä

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(c-c)^k \;=\; \frac{f^{(0)}(c)}{0!} \;=\; f(c),$$

mutta yleisesti Taylorin sarjan summa on $f(x)$ vain, kun sarjan osasumma eli vastaava Taylorin polynomi $T_n(x)$ lähestyy arvoa $f(x)$, kun $n \to \infty$. Toisin sanoen jos funktion f Taylorin sarja voidaan muodostaa pisteessä c, niin

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k$$

täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) \;=\; f(x) \qquad \text{eli} \qquad \lim_{n\to\infty} R_n(x) \;=\; 0,$$

missä $R_n(x)$ on huomautuksissa 5.26 ja 5.27 esiintyvä Taylorin polynomia $T_n(x)$ vastaava jäännöstermi. Esitetään asia vielä täsmällisesti lauseen muodossa.

Lause 5.28. *Oletetaan, että funktiolla f on kaikkien kertalukujen derivaatat pisteessä c. Tällöin*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}\,(x-c)^k$$

täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) \;=\; 0,$$

missä $R_n(x)$ on huomautuksissa 5.26 ja 5.27 esiintyvä Taylorin polynomia $T_n(x)$ vastaava jäännöstermi.

Jos funktion f Taylorin sarjan summa pisteessä x on $f(x)$, sanotaan, että sarja *esittää* funktiota f pisteessä x. Taylorin sarjan *voimassaoloalue* on niiden pisteiden joukko, joissa sarja esittää funktiota f. Joskus sanotaan myös, että funktio f voidaan *kehittää* Taylorin tai Maclaurinin sarjaksi.

Esimerkki 5.15. Muodostetaan funktion

$$f(x) \;=\; \sin x$$

Maclaurinin sarja, ja osoitetaan, että sarja esittää funktiota $\sin x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$ (eli sarjan voimassaoloalue on koko reaalilukujen joukko).

Induktiolla voidaan helposti todistaa, että

$$f^{(2k)}(x) \;=\; (-1)^k \sin x \qquad \text{ja} \qquad f^{(2k+1)}(x) \;=\; (-1)^k \cos x$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$ ja kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Täten

$$f^{(2k)}(0) \;=\; 0 \qquad \text{ja} \qquad f^{(2k+1)}(0) \;=\; (-1)^k$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Siis

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$$

on funktion $f(x) = \sin x$ Maclaurinin sarja. Osoitetaan vielä, että tämän sarjan summa on $\sin x$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Jos $x = 0$, niin sekä sarjan summa että sinin arvo ovat nollia, joten sarja esittää funktiota $\sin x$. Olkoon sitten $x \neq 0$. Taylorin lauseen (huomautus 5.26) nojalla

$$\sin x \;=\; T_n(x) \;+\; R_n(x),$$

missä $T_n(x)$ on funktion $\sin x$ Maclaurinin polynomi ($n \in \mathbf{N}$) ja

$$R_n(x) \;=\; \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \qquad (\xi \in \,]0, x[\ \text{ tai } \xi \in \,]x, 0[\,).$$

Nyt

$$|R_n(x)| \;=\; \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| \;\leq\; \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; 0,$$

joten

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) \;=\; 0.$$

Siis lauseen 5.28 nojalla

$$\boxed{\sin x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \forall x \in \mathbf{R}.}$$

Taylorin lauseen vaatima funktion derivaattojen laskeminen ja jäännöstermitarkastelu on usein työlästä. Seuraava jo aluksi esitetty huomio tarjoaa mahdollisuuden käyttää Taylorin lauseen sijasta jo aiemmin muodostettuja potenssisarjoja.

Huomautus 5.29. Jos funktiolla $f(x)$ on välillä $]c-h, c+h[$ $(h > 0)$ potenssisarjakehitelmä

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k, \tag{5.8}$$

niin seurauksen 5.20 (s. 124) nojalla tämä sarja on funktion $f(x)$ Taylorin sarja pisteessä c.

Huomautus 5.30. Huomautuksen 5.29 Taylorin sarjan voimassaoloalue on vähintään huomautuksen väli $]c-h, c+h[$, mutta voimassaoloalue voi olla laajempikin. Voimassaoloalue sisältää esimerkiksi kaikki ne väliin $]c-h, c+h[$ kuulumattomat pisteet x, joille on jo osoitettu, että ehto (5.8) on voimassa. Tällöinhän muodostettu Taylorin sarja esittää funktiota $f(x)$ myös pisteessä x. Tällainen tilanne voi esiintyä esimerkiksi, jos $]c-h, c+h[$ on tarkasteltavan Taylorin sarjan suppenemisväli ja väliin kuulumaton piste on suppenemisvälin päätepiste.

Aiemmin muodostettuja potenssisarjoja voidaan nyt yrittää hyödyntää joko suoraan tai muokkaamalla niitä sopivasti. Jos on aiemmin osoitettu, että jonkin oikeaa muotoa olevan potenssisarjan summa on jossakin pisteen c ympäristössä funktio, jonka Taylorin sarjaa etsitään, niin tehtävä on sarjan muodostamisen osalta jo suoritettu. Jäljellä on mahdollisesti vielä sarjan voimassaoloalueen määrittäminen, jos voimassaoloalue ei selviä aiemman tarkastelun perusteella.

Jos toisaalta edellä mainittua potenssisarjaa ei ole tiedossa, voidaan yrittää muokata tunnettuja potenssisarjoja siten, että uuden sarjan summa on haluttu funktio. Mahdollisia tapoja ovat esimerkiksi sarjojen derivointi ja integrointi, funktioiden sijoittaminen sarjoihin muuttujan x tilalle tai sopivien (esimerkiksi trigonometristen) kaavojen käyttö. Lähtökohdan tarjoaa esimerkiksi geometrinen sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \;=\; \frac{1}{1-x},$$

joka potenssisarjana on funktion

$$f(x) \;=\; \frac{1}{1-x}$$

Maclaurinin sarja välillä $]-1, 1[$.

Esimerkki 5.16. Esimerkissä 4.14 (s. 103) osoitettiin geometrista sarjaa integroimalla ja aiempia tuloksia käyttäen, että

$$\boxed{\log(1+x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \;=\; x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad \forall x \in \,]-1, 1]\,.}$$

Huomautusten 5.29 ja 5.30 nojalla kyseinen sarja on funktion $\log(1+x)$ Maclaurinin sarja välillä $]-1, 1]$.

Jos $x > 1$ tai $x \leq -1$, niin sarja hajaantuu (esimerkki 4.4, s. 91). Täten sarjan summa ei voi olla $\log(1+x)$ (ja $\log(1+x)$ ei edes ole määritelty, kun $x \leq -1$).

Esimerkki 5.17. Määritetään kosinin Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

Kosinin Maclaurinin sarja voidaan tietysti määrittää vastaavasti kuin sinin Maclaurinin sarja esimerkissä 5.15. Menetellään nyt kuitenkin toisin ja hyödynnetään esimerkissä 5.15 muodostettua sarjaa

$$\sin x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Koska tämä sarja voidaan potenssisarjana derivoida termeittäin, niin

$$\begin{aligned}
\cos x &= D(\sin x) \\
&= D\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot D(x^{2k+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (2k+1) \cdot x^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k}
\end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Siis funktion $\cos x$ Maclaurinin sarja on

$$\boxed{\cos x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, x^{2k} \;=\; 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbf{R}.}$$

Esimerkki 5.18. Esimerkissä 5.12 (s. 120) osoitettiin geometrista sarjaa integroimalla ja aiempia tuloksia käyttäen, että

$$\boxed{\arctan x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1} \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad \forall x \in [-1,1]\,.}$$

Huomautusten 5.29 ja 5.30 nojalla kyseinen sarja on funktion $\arctan x$ Maclaurinin sarja välillä $[-1, 1]$.

Jos $|x| > 1$, niin sarja hajaantuu (esimerkki 5.5, s. 110), joten sarjan summa ei tietenkään ole $\arctan x$ (eli sarja ei esitä funktiota $\arctan x$).

Esimerkki 5.19. Esimerkissä 4.16 (s. 107) osoitettiin, että

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, x^k \qquad \forall x \in \mathbf{R}.}$$

Huomautuksen 5.29 nojalla sarja on funktion e^x Maclaurinin sarja (kaikilla $x \in \mathbf{R}$).

Esimerkki 5.20. Määritetään funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

Esimerkin 5.19 perusteella

$$e^x - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

joten

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} \qquad \forall x \neq 0.$$

Lisäksi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{(k+1)!} = 1 + \frac{0}{2!} + \frac{0}{3!} + \cdots = 1 = f(0),$$

joten sarja esittää funktiota $f(x)$ myös pisteessä $x = 0$. Täten huomautuksen 5.29 nojalla

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)!}\, x^k = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 5.21. Määritetään funktion a^x $(a > 0)$ Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

Esimerkin 5.19 perusteella

$$a^x = e^{x \log a} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x \log a)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{k!}\, x^k \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

joten huomautuksen 5.29 nojalla

$$\boxed{a^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log a)^k}{k!}\, x^k \qquad \forall x \in \mathbf{R}.}$$

Esimerkki 5.22. Määritetään funktion $f(x) = e^{3x+1}$ Maclaurinin sarja ja sarjan voimassaoloalue.

Esimerkin 5.19 perusteella

$$e^{3x+1} \;=\; e \cdot e^{3x} \;=\; e \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e3^k}{k!}\, x^k \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Esimerkki 5.23. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Voidaan suhteellisen helposti osoittaa, että $f^{(n)}(0) = 0$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$ (harjoitustehtävä). Täten funktion $f(x)$ Maclaurinin sarja on

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!}\, x^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} 0 \;=\; 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Sarja tietenkin suppenee kaikilla $x \in \mathbf{R}$ mutta antaa funktion $f(x)$ arvon vain pisteessä $x = 0$.

5.4.3 Sovelluksia

Taylorin sarjaa voidaan käyttää esimerkiksi funktion raja-arvon ja ääriarvon määrittämiseen (korvaamalla funktio Taylorin sarjallaan), derivaattojen määrittämiseen pisteessä c sekä yleensäkin erilaisiin likiarvotehtäviin.

Esimerkki 5.24. Määritetään derivaatta $f^{(n)}(0)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Esimerkin 5.20 nojalla

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\, x^n \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Täten seurauksen 5.20 (s. 124) nojalla

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} \;=\; \frac{1}{(n+1)!} \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

ja edelleen

$$f^{(n)}(0) \;=\; \frac{1}{n+1} \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Siis esimerkiksi

$$f^{(2019)}(0) \;=\; \frac{1}{2020}.$$

Esimerkki 5.25. Määritetään raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3 \arctan x}.$$

Tehtävä voidaan ratkaista käyttämällä neljä kertaa l'Hospitalin sääntöä, mutta tällöin joudutaan kohtuullisen mutkikkaisiin derivointeihin. Määritetään raja-arvo nyt l'Hospitalin säännnön sijasta käyttämällä funktioiden potenssisarjaesityksiä. Esimerkin 5.19 nojalla

$$e^x \;=\; 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \forall x \in \mathbf{R},$$

joten

$$\begin{aligned} e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \;&=\; \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &=\; x^4\left(\frac{1}{4!} + \frac{x}{5!} + \frac{x^2}{6!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Esimerkin 5.18 nojalla taas

$$\arctan x \;=\; x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad \forall x \in [-1, 1]\,,$$

joten

$$x^3 \arctan x \;=\; x^3\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) \;=\; x^4\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right)$$

kaikilla $x \in [-1, 1]$. Jos siis $0 < |x| \leq 1$, niin

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3 \arctan x} \;&=\; \frac{x^4\left(\frac{1}{4!} + \frac{x}{5!} + \frac{x^2}{6!} + \cdots\right)}{x^4\left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots\right)} \\ &=\; \frac{\frac{1}{4!} + \frac{x}{5!} + \frac{x^2}{6!} + \cdots}{1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} - \cdots}, \end{aligned}$$

josta nähdään suoraan, että

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^3 \arctan x} \;=\; \frac{1}{4!} \;=\; \frac{1}{24}.$$

Esimerkki 5.26. Määritetään integraalille

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

sellainen likiarvo, että virhe on korkeintaan 10^{-2}.

Esimerkin 5.19 perusteella

$$e^{-x^2} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\,x^{2k} \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Potenssisarjana sarja voidaan integroida termeittäin, joten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \;&=\; \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\,x^{2k}\right) dx \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{k!}\,x^{2k}\,dx \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \Big/_{\!0}^{1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}\,x^{2k+1} \\
&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}.
\end{aligned}$$

Tulokseksi saatu sarja toteuttaa selvästi Leibnizin lauseen ehdot, joten sarja suppenee ja jäännöstermille saadaan arvio

$$|R_n| \;\le\; \frac{1}{(2n+1)n!}$$

kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Virheelle asettu vaatimus toteutuu nyt, jos

$$\frac{1}{(2n+1)n!} \;\le\; 10^{-2}$$

eli

$$(2n+1)n! \;\ge\; 100.$$

Pienin epäyhtälön toteuttava kokonaisluku on 4, joten esimerkiksi

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \;\approx\; \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} \;=\; 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} \;=\; \frac{26}{35}$$

tuottaa halutun tarkkkuuden.

Esimerkki 5.27. Arvioidaan funktiota $f(x) = \sin x$ välillä $[0, \frac{\pi}{4}]$ tarkkuudella 10^{-4}.

Esimerkissä 5.15 (s. 131) osoitettiin, että

$$\sin x \;=\; T_n(x) \;+\; R_n(x),$$

missä $T_n(x)$ on funktion $\sin x$ Maclaurinin polynomi ($n \in \mathbf{N}$) ja

$$|R_n(x)| \;\leq\; \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Välillä $[0, \frac{\pi}{4}]$ tarvittavaksi ehdoksi tulee täten

$$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} \;<\; 10^{-4},$$

joka toteutuu, kun $n \geq 6$.

Siis riittävän tarkka tulos saadaan, kun valitaan arvioksi esimerkiksi $T_6(x)$. Täten kaikilla $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ on voimassa arvio

$$\sin x \;=\; T_6(x) \;+\; R_6(x) \;=\; x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \delta,$$

missä $|\delta| < 10^{-4}$.