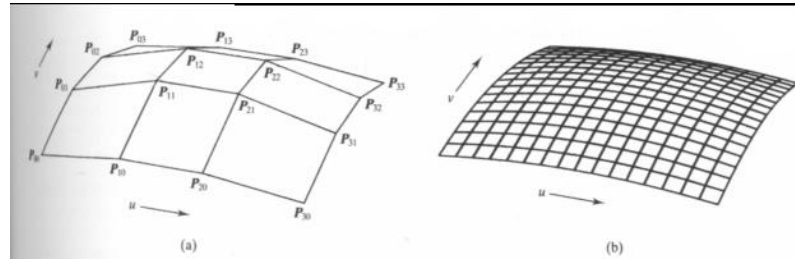


### 3.4. Käyristä pintoihin

Edeltävä parametrinen, kuutiollisten käyräsegmenttien käsittely yleistyy helposti kaksiparametrisiksi kuutiopintalapuiksi. Lapun pinnan piste saadaan kaksiparametrisellä funktiolla ja käyttäen kummallekin parametrille sekoitus- eli kantafunktioiden joukkoa. Kuutiollinen Bézier-lappu on muotoa:

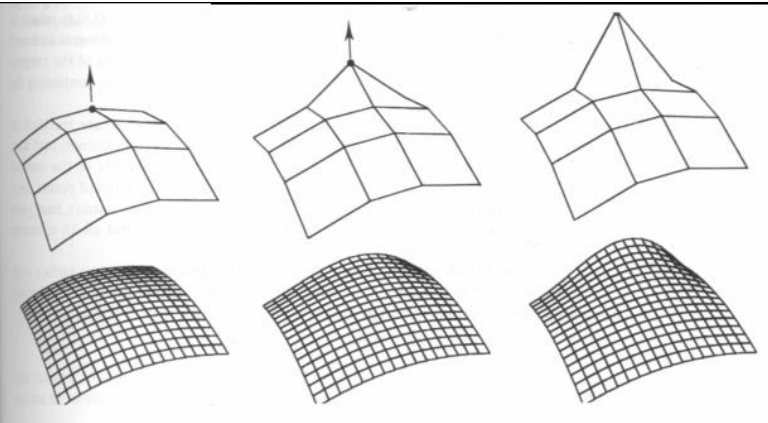
$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_i(u) B_j(v)$$

Matemaattisessa mielessä kolmiulotteiset pinnat luodaan kahden käyrän karteesisesta tulosta. Kuvassa 3.22. on Bézier-lappu kontrollipisteineen. Tarvitaan 16 kontrollipistettä määrittämään monitahokas, ja tämä määrittää pinnan muodon. Kuvasta 3.22. (a) havaitaan 12 kontrollipistettä liittyvän lapun reunoihin. Määriteltäessä  $4 \times 4$ -matriisi kontrollipisteille saadaan kuvattua lapun rajakäyrät. Reunat tuotetaan näin neljällä Bézier-käyrällä.



Kuva 3.22. (a) Kontrollimonitahokas ja (b) tuloksena saatu kaksiparametrinen, kuutiollinen Bézier-lappu.

Bézier-käyrän ominaisuudet laajennetaan pinnalle. Kuva 3.23. esittää pinnan muokkaamista "vetämällä" yksittäistä kontrollipistettä. Lappua muunnetaan muuntamalla sen kontrollipisteitä.

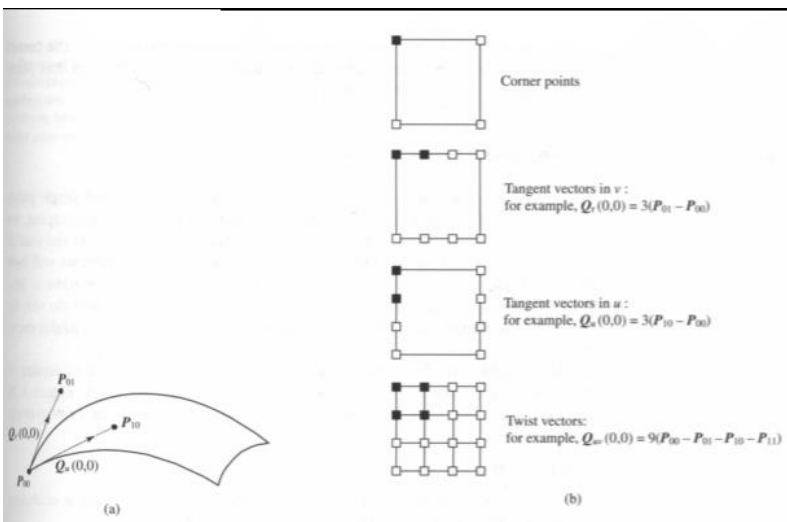


Kuva 3.23. Bézier-lapun yhden kontrollipisteen "nostamisen" vaikutus.

Kontrollipisteiden käytön vaikutus on ymmärrettävissä analogisena kuutiollisten käyrien kanssa. Geometrinen tulkinta on tietysti monimutkaisempi kuin käyrillä. Bézier-muotoa käyttämällä ei tarvitse käsitellä tangenttivektoreja, mutta tätä silmällään hiukan.

Kuva 3.24. esittää lapun yhden kulman vektorit.  $Q_u(0,0)$  on vakio kertaa tangenttivektori pisteessä  $Q(0,0)$  parametrin  $u$  suuntaan, ja vastaavasti  $Q_v(0,0)$  on  $v$ :n suuntaan. Näiden ristitulo, vääntövektoriksi kutsuttu, määrää tangenttivektorien muutosnopeuden suhteessa parametreihin  $u$  ja  $v$ . Se on tangenttivektorien muodostaman tason normaali.

Bézier-käyrän kontrollipisteiden tapaan laput määrätään neljän ääripisteen, kahdeksan tangenttivektorin (kaksi kussakin kulmassa) ja neljän vääntövektorin perusteella. Esim. Kuva 3.24. (b) kuvaa tällaisen kontrollipisteiden monitahokkaan. Neljä pisteparia määrää tangenttivektorit  $u$ :n suuntaan kussakin kulmassa, vastaavasti  $v$ :lle ja kaikki 16 määräävät vääntövektorit.



Kuva 3.24. (a)  $P_{00}$ :n tangenttivektorit ja (b) näihin liittyvät kontrollipistematriisin alkiot.

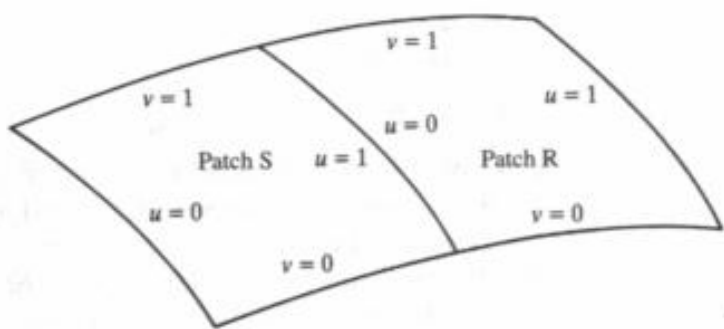
## Jatkuvuus ja Bézier-laput

Mallintamisessa olennainen kysymys on, miten liittää lappuja toisiinsa niin, että ylläpidetään pinnan jatkuvuus. Tämä hoidetaan samantapaisesti kuin Bézier-käyrän segmenteillä.

Ensimmäisen asteen jatkuvuus kahden lapun yli aikaansaadaan käyrien yhdistämisen laajenuksena. Kuva 3.25. esittää kahta lappua, S ja R, joilla on yhteinen reuna. Paikalliselle eli nollannen asteen jatkuvuudelle on voimassa:

$$\mathbf{S}(1, v) = \mathbf{R}(0, v), \text{ kun } 0 < v < 1$$

Ehto osoittaa kahden monikulmion jakavan yhteisen reunan (kuva 3.26.) ja:



Kuva 3.25. Kahden lapun yhdistäminen.

$$\mathbf{S}_{33} = \mathbf{R}_{03}$$

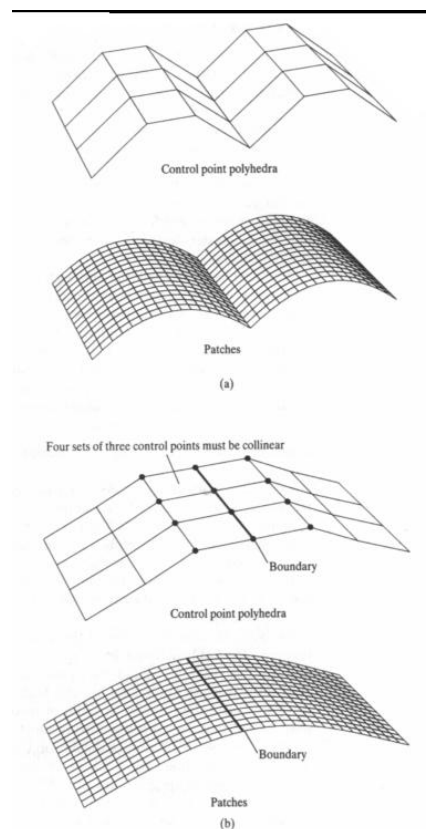
$$\mathbf{S}_{32} = \mathbf{R}_{02}$$

$$\mathbf{S}_{31} = \mathbf{R}_{01}$$

$$\mathbf{S}_{30} = \mathbf{R}_{00}$$

eli

$$\mathbf{S}_{3i} = \mathbf{R}_{0i}, i = 0, \dots, 3$$



Kuva 3.26. (a) Paikallinen jatkuvuus Bézier-lappujen välillä ja (b) tangentiaalinen jatkuvuus lappujen välillä.

Jotta saadaan ensimmäisen asteen jatkuvuus, ensimmäisen lapun tangenttivektorien pisteessä  $u=1$  tulee täsmätä toisen lapun vektorien pisteessä  $u=0$  arvoille  $v$ . Täten monitahokkaan reunojen jokainen neljästä parista, jotka määräävät rajat, tulee olla yhdensuuntaisia ( $k$  skalaarivakio):

$$(\mathbf{S}_{3i} - \mathbf{S}_{2i}) = k(\mathbf{R}_{1i} - \mathbf{R}_{0i}), i = 0, \dots, 3$$

Mainittu rajoitus on tiukka. Liittäessä kaksi lappua yhteen kahdeksan kontrollipistettä kiinnitetään, ja kolmen lapun tilanteessa kiinnitettyjä on 12.

On käsitelty suorakulmaisia lappuja, mutta näillä ei voi kaikkia mahdollisia kuvauksia esittää, esim. pallomaista. Tällöin voidaan laput supistaa kolmioiksi.

Tietokonegraafikasta tunnettu esimerkkikohde on Utahin teekannu, joka on varhainen (1975) sovellus Bézier-lappujen verkosta. Seuraavassa vertaillaan sitä monikulmioverkkoesitykseen.

Teekannua kuvattiin 32 Bézier-lapulla, joista saatiin kannu ja kansi pyörähdyskappaleina sekä sen korva ja nokka putkimaisina osina. Kuvassa 3.27. yksi lappu on esitetty tummaksi väritettyinä.

Esitys sisältää:

32 lappua  $\times$  16 kontrollipistettä / lappu = 288 kärkeä (useimmat laput jakavat 12 kontrollipistettä) =  $288 \times 3$  reaalitykettä

”Mielekäs” monikulmioverkkoesitys käsittäisi:

noin  $2048 \times$  nelisivuista monikulmiota =  $2048 \times 3$  reaalitykettä.

Täten karkean monikulmioverkon ja lappujen, primitiivien, suhde on  $2048/32$ .

### 3.5. B-splini-pintalappu

Kuutiollisen B-splini-pinnan muodostamiseksi lasketaan:

$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{P}_{ij} B_{i,j}(u, v)$$

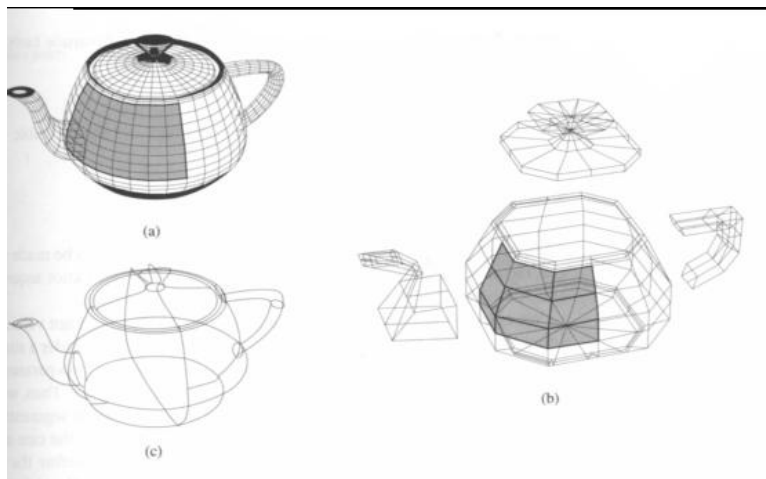
$\mathbf{P}_{ij}$  on kontrollipisteiden matriisi ja  $B_{i,j}(u, v)$  kaksimuuttujainen kantafunktio, joka lasketaan:

$$B_{i,j}(u, v) = B_i(u) B_j(v)$$

Tässä  $B_i(u)$  ja  $B_j(v)$  ovat aiemmin määritellyjä yksimuuttujaisia kuutiollisia B-splinejä.

Saadaan:

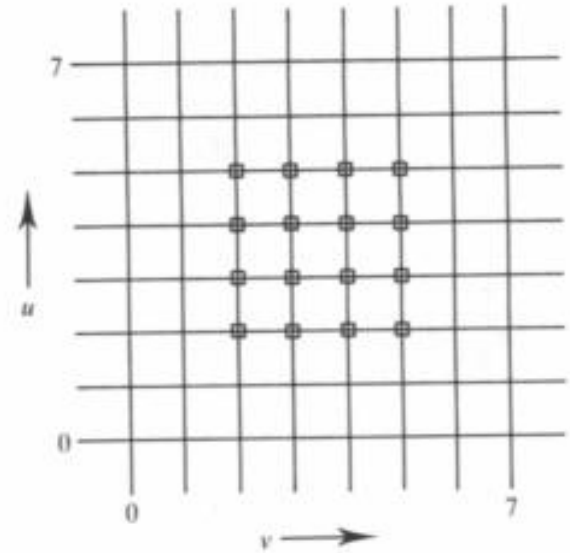
$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{ij} B_i(u) B_j(v)$$



Kuva 3.27. Utahin teekannu: (a) vakioiden  $u$  ja  $v$  janat, kun kannussa on 32 Bézier-lappua, joista yksi on väritetty harmaalla, (b) kontrollipisteiden ”rautalanka-kuva”, jossa harmaa osa on lapun kontrollimonitahokas, sekä (c) lappujen reunojen rautalankaesitys.

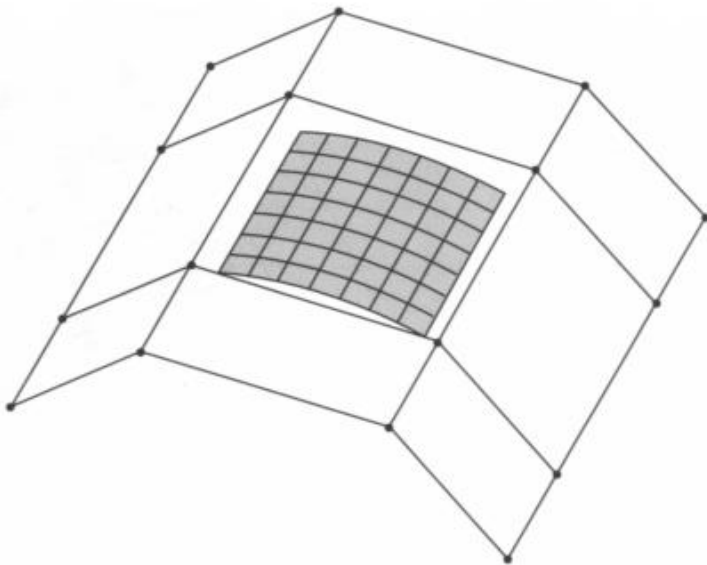
Käyräsegmenttien tapaan B-splini-lappu muodostetaan useista suorakulmaisista pinta-lappusegmenteistä. Käytetään kahta,  $u$ :n ja  $v$ :n solmujonoa, jotka otetaan näiden parametri-avaruudesta.

Tarkastellaan tasaisia B-splini-lappuja, joissa solmuarvot ovat tasavälisiä parametrien  $u$  ja  $v$  suunnissa. Aluksi tarkastellaan yksittäistä lappusegmenttiä, joka on analoginen käyräsegmentille, mutta nyt neljän kontrollipisteen asemesta on  $4 \times 4$  kontrollipistettä, hila  $P_{ij}$ . Näihin sovelletaan samoja kaksimuuttujaisia kantafunktioita. Yksittäisen B-splini-käyräsegmentin vaatiessa kahdeksan solmuarvon vektorin lappusegmentti käyttää  $8 \times 8$  solmuarvoa (kuva 3.28.).



Kuva 3.28. Parametriavaruuden 16 kaksimuuttujaisista B-splinin pistettä.

Tarkastellaan kuvan 3.29. esimerkkiä, jossa on yksittäinen, 16 kontrollipisteellä muodostettu B-splini-lappusegmentti.



Kuva 3.29. Yksittäinen B-splini-lappusegmentti.

Kuten eivät B-splini-käyrät, eivät B-splini-käyräsegmenttikään interpoloi neljää sisintä kontrollipistettään eikä myöskään muita 12 pistettä.

Kuten käyrillä, lappujen käyttäytymistä voidaan säätää kontrollipistemontahokkaan reunoilla soveltamalla moninkertaisia kärkiä. Katsotaan kuvan 3.30. esimerkkiä. Siinä on kolminkertaiset kärjet, jolloin saadaan 24 pistettä. Saadaan kolmensegmenttinen lappu rajakärkiin liittyen. Mitään rajakärjistä ei interpoloida.

Toisessa esimerkissä, kuvassa 3.31., kolminkertaistetaan kaksi rajakärkien joukkoa. Saadaan yhdeksänsegmenttinen lappu.

Kolmannessa esimerkissä, kuvassa 3.32., jossa kontrollipistemontahokas on edellisten kaltainen, on yhtä sisäkontrollipistettä on nostettu.