

ALGEBRALLISISTA SINGULARITEETEISTA

Arvoisat kuulijat! Haluan ensimmäiseksi kiittää Suomalaista Tiedeakatemia osakseni tulleesta huomionosoituksesta. Olen tästä erityisen iloinen siitä syystä, että tutkimusalani kommutatiivinen algebra ja algebrallinen geometria ja ovat Suomessa varsin tuntemattomia. Algebrallinen geometria on tällä hetkellä yksi modernin matematiikan keskeisistä osa-alueista. Se liittyy läheisesti kommutatiiviseen algebraan, kompleksianalyttiseen geometriaan ja lukuteoriaan, mutta sillä on yhtymäkohtia myös useimpiin muihin tärkeisiin matematiikan aloihin. Sen sovellukset ulottuvat maattisesta biologiasta ja teoreettisen fysiikan säieteoriasta geometriseen mallinnukseen ja mobiililaitteissa käytettäviin salausjärjestelmiin.

Algebrallinen geometrian voidaan alun perin katsoa saaneen alkunsa antiikin Kreikasta. Kreikkalaiset eivät kuitenkaan tunteneet koordinaatteja eivätkä tuntemattoman sisältävän yhtälön käsitettä. Kehitys kohti modernia algebrallista geometriaa alkaakin varsinaisesti Descartesin ja Fermat'n keksinnöstä kuvata pisteen sijaintia euklidisessa avaruudessa sen koordinaattien avulla. Tämä keksintö synnytti koulusta jokaiselle tutun analyttisen geometrian. Analyttisessä geometriassa geometrinen kuvio määritellään niiden pisteiden joukkona, joiden koordinaatit toteuttavat tietyt yhtälöt. Algebrallinen geometria keskittyy tutkimaan niitä geometrisia kuvioita ja muotoja, jotka voidaan määritellä käyttämällä polynomi-yhtälöitä. Yksinkertainen esimerkki on paraabeli, jonka yhtälö on $y=x^2$. Yhden polynomi-yhtälön tilalla on kuitenkin tavallisesti polynomi-yhtälöistä koostuva yhtälöryhmä, jossa voi olla mikä tahansa määrä muuttujia. Tällaisen yhtälöryhmän ratkaisujen sanotaan muodostavan algebrallisen variston. Algebralliset varistot ovat siis olla algebrallisia käyriä, pintoja tai näiden korkeampiulotteisia vastineita. Voimme etsiä yhtälöryhmällemme ratkaisuja reaalitylukujen joukon sijasta myös muista lukujoukoista kuten kompleksilukujen joukosta. Kokonais- tai rationaalilukuratkaisut antavat taas tietoa lukuteorian kysymyksistä.

Usein sanotaan, että algebrallisessa geometriassa tutkitaan geometriaa polynomien avulla ja polynomeja geometrian avulla. Algebrallinen geometria perustuu kommutatiiviseen algebraan samalla tavalla kuin differentiaaligeometria differentiaalilaskentaan. Kommutatiivisen algebran ohella algebrallinen geometria käyttää myös topologian, differentiaaligeometrian ja kompleksianalyysin menetelmiä. Nojautuminen algebraan mahdollistaa geometrisen intuition soveltamisen myös tilanteisiin, joissa ei voida piirtää kuvaa. Tällaisia tilanteita ovat esimerkiksi lukuteorian ongelmat.

Polynomien käytöstä on paljon etuja. Polynomit ovat säännöllisesti käyt-

täytyviä funktioita. Algebrallinen geometria on tässä mielessä hallittua geometriaa verrattuna esimerkiksi fraktaaligeometriaan. Vaikka luonnossa esiintyvät muodot eivät tietenkään aina ole algebrallisia, niitä voidaan usein approksimoida polynomeilla. Loppujen lopuksi tietokone osaa laskea vain polynomifunktioilla. Tietokoneiden laskentatehon kehittymisen ansiosta itävaltalaisen matemaatikon Buchbergerin 1960-luvulla keksimistä algoritmeista on tullut realistinen tapa ratkaista polynomiyhtälöistä koostuvia yhtälöryhmiä myös käytännössä.

Mikä on singulariteetti? Olemme kuulleet avaruuden mustien aukkojen singulariteeteista jotka imevät sisään kaiken lähelle tulevan materian ja joista avautuu uusia maailmankaikkeuksia. Matematiikassa sana esiintyy eri yhteyksissä. Vaikka tilanne olisikin vähemmän pelottava, merkitsee se aina jotakin tavalla tai toisella odotetusta poikkeavaa. Algebrallisella singulariteetilla tarkoitetaan algebrallisen variston pistettä, jonka kohdalla varisto ei näytä sileältä. Singulariteetin kohdalla käyrä tai pinta voi leikata itseään tai siinä voi olla terävä kärki tai kulma. Singulariteetin vastakohta on sileä piste. Sileässä pisteessä käyrä näyttää aivan läheltä katsottuna suoralta ja pinta tasolta. Variston singulariteeteilla voi olla sovelluksissa varsin konkreettinen ja usein epätoivottu merkitys. Jos varistomme pisteet kuvaavat robotin käsivarren asentoja, niin singulariteetin kohdalla käsivarsi saattaa menettää ohjattavuutensa tai se on jopa vaarassa rikkoutua. On selvää, että tällaiset poikkeuspisteet tekevät tutkimuksesta mielenkiintoista vaikkakin samalla haasteellista. Singulariteettien tutkimus on keskeinen osa algebrallista geometriaa ja kommutatiivista algebraa, mutta niitä tutkitaan toki myös muilla matematiikan alueilla kuten esimerkiksi katastrofi- tai kaaosteoriassa.

Algebrallisilla singulariteeteilla on kuitenkin merkittävä ero muihin singulariteetteihin verrattuna. Algebralliset singulariteetit voidaan nimittäin

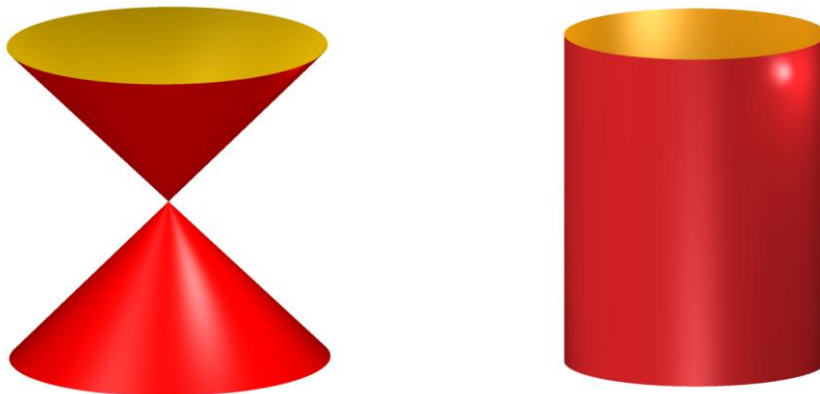


silottaa. Tämä tarkoittaa, että variston pisteet voidaan parametrisoida sileän variston pisteiden avulla. Usein sanotaan, että varistolla on sileä malli. Havainnollisesti sanottuna voimme ajatella varistomme olevan sileän variston varjo. Näette kuvassa itävaltalaisen matemaatikon Herwig Hauserin taideteoksen ”Singulariteetin synty”.

Siinä näkyy, miten solmuksi kutsutun käyrä singulariteetin voidaan ajatella syntyvän avaruuskäyrän projektiona. On hämmästyttä-

vää, että tämä pätee mille tahansa varistolle. Silotuksen olemassaolon todisti japanilainen matemaatikko Hironaka vuonna 1964. Yli 200 sivua pitkä todistus on viime vuosisadan matematiikan huomattavampia saavutuksia. Se toi Hironakalle Fieldsin mitalin, jota voidaan pitää matematiikan Nobel-palkintona. Hironakan todistus koskee itse asiassa vain kompleksilukukertoimisia yhtälöitä. Vielä avoin aritmeettinen tapaus on tällä hetkellä erittäin aktiivisen tutkimuksen kohteena.

Hironakan todistus perustuu siihen, että varistolle tehdään peräkkäin räjäytyksiksi kutsuttuja operaatiota, jotka jättävät sileät kohdat koskemattomiksi, mutta parantavat askel askeleelta sen singulariteetteja. Olenkin itse jo kauan tutkinut ns. räjäytysalgebroidia, joiden avulla räjäytyksiä voidaan kuvata algebrallisesti. Kuvassa näkyy kaksoiskartion räjäytys. Kaksoiskartion sileä malli on sylinteri. Näemme, että sen kärjessä oleva singulariteetti syntyy, kun sylinterin pinnalla olevan ympyrä luhistuu pisteeksi. Täsmällisemmin sanottuna räjäytys on tietty koordinaatistomuunnos.



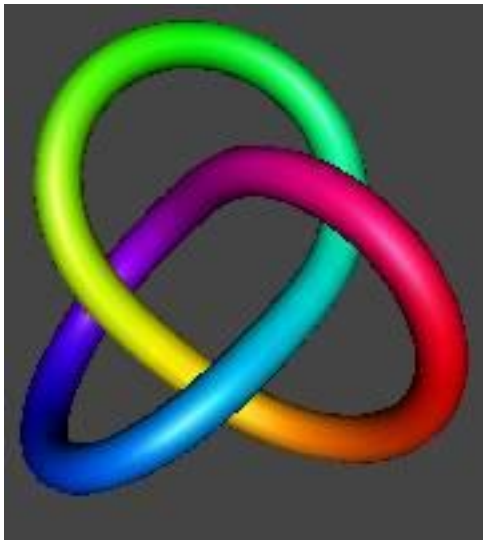
Hironakan tuloksen merkitys algebralliselle geometrialle on siinä, että sen avulla on tiettyssä määrin mahdollista soveltaa sileille varistoille voimassa olevia tuloksia mihin tahansa varistoon. Sileän pisteen lähellä yhtälömme voidaan ratkaista: implisiittifunktiolauseen avulla voimme lausua tietyt muuttujat muiden avulla. Saamme tällä tavoin selkeän käsityksen siitä, miltä varistomme tässä kohdassa näyttää.

Singulariteetin kohdalla emme voi menetellä näin. Lähellä singulariteettia ei ole helppo kuvata variston muotoa edes tietokoneen avulla. Voimme kuitenkin turvautua silotukseen. Silotus toimii tällöin ikään kuin voimakkaana suurennuslasina. Sen avulla voimme yrittää ymmärtää, miten singulariteetti on syntynyt ja mikä on sen rakenne.

Milloin toisen singulariteetin voidaan sanoa olevan pahempi kuin toinen?

Milloin singulariteetit ovat ekvivalentteja? Näihin kysymyksiin pyritään vastaamaan luokittelemalla singulariteetteja. Luokittelu ei ole helppoa. Jo pintojenkin singulariteetteja osataan luokitella vain erikoistapauksissa. Singulariteetin monimutkaisuutta voidaan yrittää mitata liittämällä siihen sopivia lukuja – sen ns. numeerisia invariantteja. Tällaisia lukuja konstruoidaan usein silotuksen avulla. Tällä hetkellä aktiivisen tutkimuksen kohteena ovat ns. hyppyluvut. Hyppyluvut liittyvät kertojaideaalien teoriaan. Kertojaideaalit ovat uusi tehokas työkalu singulariteettien tutkimuksessa.

Olen viime aikoina tutkinut algebrallisten tasokäyrien singulariteetteja ja niiden hyppylukuja. Nimitys tasokäyrä on siinä mielessä harhaanjohtava, että kompleksinen algebrallinen käyrä on itse asiassa pinta neliulotteisessa reaalisessa avaruudessa. Yksi singulariteettien luokitteluperuste on



singulariteetin topologinen tyyppi eli sen muoto. Tämä saadaan selville leikkaamalla käyrää pienellä pallolla. Tällöin syntyy singulariteetin solmu. Kuvassa näkyy kärjeksi kutsuttu käyräsingulariteetti ja sen solmi. Sileässä pisteessä solmu olisi triviaali eli tavallinen ympyrä. Viime vuosisadan alusta lähtien on etsitty käyrän numeerisia invariantteja, jotka määräisivät sen muodon. Näitä onkin löydetty useita. Oppilaani Tarmo Järvilehto onnistui väitöskirjassaan todistamaan, että hyppyluvut voidaan lisätä tähän luetteloon