TAMPEREEN YLIOPISTO

Luonnontieteiden kandidaatin tutkielma

Mika Kähkönen

L'Hospitalin sääntö

Matematiikan, tilastotieteen ja filosofian laitos

Matematiikka

Lokakuu 2007

Sisältö

1 Johdanto

1.1 Tutkielman sisältö

Tutkielmassa seuraamme lähteenä Salasin oppikirjaa *Calculus* [2]. Aluksi luvussa 2 annamme L'Hospitalin säännön todistamisessa tarvittavia määritelmiä ja lauseita. Luvussa 3 määrittelemme, johdamme ja todistamme säännön. Lopuksi sovellamme sääntöä esimerkkeihin.

Lukijalta edellytämme derivoinnin ja integroinnin perusteiden osaamista: raja-arvon, jatkuvuuden, derivoituvuuden ja välien käsitteiden ja näihin liittyvien merkintöjen tuntemista.

Tutkielmassa käytämme säännöstä nimeä *l'Hospitalin sääntö*. Säännön nimi esiintyy myös muodossa l'Hôpitalin tai l'Hopitalin sääntö. Sääntö sai nimensä l'Hôpitalin markiisilta, jonka aikaan nimi kirjoitettiin 'l'Hospital'. Myöhemmin ranskan kielessä on poistettu l'Hospitalista ääntymätön 's' ja merkitty 'o'-kirjaimen yläpuolelle sirkumfleksi: l'Hôpital. [3]

1.2 Säännön syntyhistoria

L'Hôpitalin markiisi Guillaume François Antoine (1661–1704) oli ranskalainen matemaatikko. Hän palkkasi vuonna 1694 opettajansa Johann Bernoullin (1667–1748) pitämään hänet ajan tasalla tämän uusista ideoista. L'Hôpital sai myös luvan käyttää tuloksia haluamallaan tavalla, joten hän julkaisi ne vuonna 1696 kirjassaan *l'Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* (suomeksi jotakuinkin "Äärettömän pienen analyysiä käyrien ymmärtämiseksi"). Tässä ensimmäisessä analyysin oppikirjassa on myös tutkielmamme aiheena oleva menetelmä, jota alettiin nimittää l'Hospitalin säännöksi.

L'Hôpital kiitti esipuheessaan Bernoullia eikä halunnut kunniaa anonyymisti julkaisemistaan tuloksista. L'Hôpitalin kuoleman jälkeen Bernoulli valitti usein l'Hôpitalin plagioineen häntä. Aikalaiset eivät uskoneet kateellisen maineen saanutta Bernoullia mutta nykytutkimus vahvistaa niin tämän säännön kuin valtaosan muistakin kirjan tuloksista olevan hänen ansiotaan. Nimitys l'Hospitalin sääntö on kuitenkin vakiintunut käyttöön. [1, s. 592-594]

2 Esitietoja

Tämän otsikon alla on määritelmiä ja lauseita, joita tarvitaan l'Hospitalin säännön todistamisessa.

Tutkielmassa kaikki luvut ovat reaalilukuja ellei toisin mainita. Samoin funktiot ovat yhden reaalimuuttujan reaaliarvoisia funktioita. Kun käytämme l'Hospitalin sääntöä laskuissa, viittaamme siihen merkitsemällä yhtäsuuruusmerkin yläpuolelle tähden: $\overset{*}{=}$.

2.1 Funktion raja-arvo ja jatkuvuus

Määritelmä 2.1. Olkoon funktio f määritelty välillä $]\, c-p, c\, [\cup]\, c, c+p\, [$, missä $p > 0$. Tällöin merkitsemme, että

$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Sanomme, että funktiolla on silloin *raja-arvo L pisteessä c.*

Tarvitsemme myös toispuoleisten raja-arvojen määritelmät.

Määritelmä 2.2 (Vasemmanpuoleinen raja-arvo)**.** Olkoon funktio f määritelty välillä $]\, c-p, c\, [$, missä $p > 0$. Tällöin merkitsemme, että

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$c - \delta < x < c \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin funktiolla on *vasemmanpuoleinen raja-arvo L pisteessä c.*

Määritelmä 2.3 (Oikeanpuoleinen raja-arvo)**.** Olkoon funktio f määritelty välillä $]\, c, c+p\, [$, missä $p > 0$. Tällöin merkitsemme, että

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L,$$

jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $\delta > 0$, että

$$c < x < c + \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tällöin funktiolla on *oikeanpuoleinen raja-arvo L pisteessä c.*

Lause 2.1. *Jos sekä vasemmanpuoleinen että oikeanpuoleinen raja-arvo on L pisteessä c, niin myös funktion raja-arvo pisteessä c on L ja päinvastoin.*

Matemaattisin merkinnöin kirjoitamme tämän seuraavasti:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Todistus. Ks. [2, s. 80]. □

Määritelmä 2.4 (Funktion jatkuvuus)**.** [2, s. 93] Olkoon funktio f määritelty ainakin avoimella välillä $]\, c - p, c + p\, [$, missä $p > 0$. Funktio on *jatkuva pisteessä c*, jos funktion raja-arvo on sama kuin funktion arvo tässä pisteessä eli jos

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$

Samaan tapaan kuin raja-arvojen kanssa, määrittelemme toispuoleiset jatkuvuudet.

Määritelmä 2.5 (Toispuoleinen jatkuvuus)**.** [2, s. 98] Funktio f on *jatkuva vasemmalta pisteessä c*, jos

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c).$$

Funktio on *jatkuva oikealta pisteessä c*, jos

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c).$$

2.2 Cauchyn väliarvolause

Cauchyn väliarvolauseen on Lagrangen väliarvolauseen (ks. [2, s. 197–199]) yleistys.

Lause 2.2 (Cauchyn väliarvolause)**.** *Oletetaan, että f ja g ovat derivoituvia välillä $]\, a, b\, [$ ja jatkuvia välillä $[\, a, b\,]$. Jos $g'(x) \neq 0$, kun $x \in\,]\, a, b\, [$, niin on olemassa sellainen piste c välillä $]\, a, b\, [$, että*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Todistus. Ks. [2, s. 613]. □

3 L'Hospitalin sääntö

3.1 Sääntö ja sen todistus

L'Hospitalin säännön avulla voidaan helposti ratkaista *epämääräisessä muodossa* (kuten $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{0}$) olevia osamäärän raja-arvoja.

Lause 3.1 (L'Hospitalin sääntö, muoto $\frac{0}{0}$)**.** *Oletetaan että derivoituvat funktiot f ja g lähestyvät lukua* 0*, kun $x \to c^+$, $x \to c^-$, $x \to c$, $x \to \infty$ tai $x \to -\infty$. Jos silloin $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to L$, niin $\frac{f(x)}{g(x)} \to L$, missä $L \in \,]-\infty, \infty[$.*

Koska raja-arvo on yksikäsitteinen, voimme siis merkitä

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{*}{=} \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

jos annetut ehdot ovat voimassa.

Huomautus 1. L'Hospitalin sääntö pätee myös muodolle $\frac{\infty}{\infty}$. Sivuutamme sen todistamisen ja keskitymme muotoon $\frac{0}{0}$. Muut epämääräiset muodot kuten ∞^0 voidaan usein muuttaa näihin kahteen muotoon aritmeettisin operaatioin [2, s. 617–618].

Huomautus 2. Säännön mukaan emme voi päätellä mitään siitä, jos derivoidulla osamäärällä $f'(x)/g'(x)$ ei ole raja-arvoa. Silloin osamäärällä $f(x)/g(x)$ voi olla raja-arvo tai sitten ei. [2, s. 619]

Todistamme nyt l'Hospitalin säännön tapauksessa $x \to c$. Aluksi todistamme, että sääntö pätee, kun x lähestyy pistettä c oikealta, sitten vasemmalta ja raja-arvon ollessa molemmissa sama toteamme, että näin on myös tapauksessa $x \to c$.

Todistus. Käytämme todistuksessa [2, s. 613–614] apuna Cauchyn väliarvolausetta 2.2.

Oletamme aluksi, että kun $x \to c^+$, niin

$$f(x) \to 0, \quad g(x) \to 0 \quad \text{ja} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} \to L.$$

Meidän pitää osoittaa, että

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Tiedämme funktion (oikeanpuoleisen) raja-arvon määritelmän 2.3 perusteella, että koska $\lim_{x\to c^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, niin sekä $f'(x)$ että $g'(x)$ ovat olemassa välillä $[\,c,\ c+h\,[$ (missä $h > 0$) ja että $g'(x) \neq 0$ (koska osamäärän raja-arvoa ei muuten olisi olemassa). Asettamalla $f(c) = 0$ ja $g(c) = 0$ varmistamme, että f ja g ovat molemmat jatkuvia välillä $[\,c, c+h\,]$ (määritelmä 2.5). Nyt tiedämme Cauchyn väliarvolauseen eli lauseen 2.2 perusteella, että on olemassa sellainen luku $c_h \in\,]\,c, c+h\,[$, että

$$\frac{f'(c_h)}{g'(c_h)} = \frac{f(c+h) - f(c)}{g(c+h) - g(c)} = \frac{f(c+h)}{g(c+h)}.$$

Ja kun $h \to 0^+$, niin $c+h \to c^+$ ja $c_h \to c^+$, joten saamme, että $\lim_{x\to c^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to c^+} \frac{f(c)}{g(c)}$. Siis sääntö pätee oikeanpuoleisen raja-arvon tapauksessa.

Sivuutamme vasemmanpuoleisen raja-arvon tapauksen $x \to c^-$ todistamisen, joka etenee vastaavalla tavalla. Koska molemmilta puolilta lähestytään samaa raja-arvoa L, niin toispuoleisten raja-arvojen lauseen 2.1 mukaan raja-arvo on L myös, kun $x \to c$. Siis l'Hospitalin sääntö pätee kaikissa näissä tapauksissa. $\square$

On vielä jäljellä tapaukset $x \to \infty$ ja $x \to -\infty$. Todistamme ensimmäisen mutta sivuutamme toisen, koska se etenee vastaavalla tavalla ja lukija voi toistaa todistuksen itse.

Todistus. Oletamme, että $f(x) \to 0$ ja $g(x) \to 0$, kun $x \to \infty$, ja että $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Nyt teemme muunnoksen $x = 1/t$, jolloin $t = 1/x$. Kun $x \to \infty$, niin $t \to 0^+$. Saamme muokattua raja-arvon muotoon

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}.$$

Nyt käytämme l'Hospitalin sääntöä tilanteessa $t \to 0^+$, mikä on jo todistettu oikeaksi, ja muutamme takaisin $x = 1/t$, jolloin saamme

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \overset{*}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Saimme siis todistettua, että $\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ eli l'Hospitalin sääntö pätee tilanteessa $x \to \infty$. $\square$

3.2 Esimerkkejä

Esittelemme muutaman esimerkin. Mukana on myös esimerkki l'Hospitalin säännön väärinkäytöstä.

Esimerkki 3.1. Tämä mukailee lähteen esimerkkiä 2 [2, s. 612]. Mikä on funktion $\frac{\sin(x)}{x}$ raja-arvo, kun x lähestyy pistettä 0? Huomaamme, että kun $x = 0$, niin $\sin(x) = 0$ ja $x = 0$, joten osamäärä on epämääräinen muoto $\frac{0}{0}$. Derivoimme osoittajan ($\mathrm{D}(\sin(x)) = \cos(x)$) ja nimittäjän ($\mathrm{D}(x) = 1$) ja käytämme l'Hospitalin sääntöä ($\stackrel{*}{=}$), jonka jälkeen lasku etenee normaalisti. Siis

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \frac{\cos(0)}{1} = 1.$$

Saimme osamäärän raja-arvoksi 1.

Esimerkki 3.2. Hieman monimutkaisempi esimerkki sisältäisi kaksinkertaisen l'Hospitalin käytön. Ehdot pitää tarkistaa joka kerta, kun sääntöä käytetään. Laskussamme osamäärän osoittaja ja nimittäjä lähestyvät lukua 0, kun $x \to 0$. Koska samoin käy myös derivoinnin jälkeen, voimme käyttää l'Hospitalia toisenkin kerran:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + x - \sin(x)}{1 - \cos(x)} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x + 1 - \cos(x)}{\sin(x)} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2 + \sin(x)}{\cos(x)} = \frac{2}{1} = 2.$$

Raja-arvoksi saimme siis luvun 2.

L'Hospitalia ei kuitenkaan voi käyttää ihan huoletta. Seuraava esimerkki valaisee, mitä käy jos osamäärän epämääräisyyden tarkistusta ei tehdä.

Esimerkki 3.3 (Väärin laskettu)**.** Esimerkissämme osoittaja saa arvon 1 ja nimittäjä arvon 0, kun $x \to \frac{\pi}{2}$, jolloin raja-arvoa ei ole. Emme huomaa tätä emmekä tarkista, onko osamäärä muotoa $\frac{0}{0}$, vaan jatkamme iloisesti vihellellen l'Hospitalilla ja lasku menee päin petäjää:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Näin ei voi tehdä. L'Hospitalia saa käyttää vain, jos alkuehdot ($f \to 0$ ja $g \to 0$) täyttyvät.

Esimerkki 3.4. Tässä esimerkissä [2, s. 618, esimerkki 5] raja-arvo pitää ensin muuttaa muotoon $\frac{0}{0}$. Raja-arvossa $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x - \sec x)$ molemmat funktiot $\tan x$ ja $\sec x$ lähestyvät ääretöntä, kun x lähestyy pistettä $\frac{\pi}{2}$. Muunnamme ensin erotuksen sopivaan muotoon, jolloin saamme

$$\tan x - \sec x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x}.$$

Nyt raja-arvo $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x}$ on epämääräinen $\frac{0}{0}$, joten

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos x} \overset{*}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{-\sin x} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Siis $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x - \sec x) = 0$.

Viitteet

[1] Carl Boyer. *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia, osa II.* (A History of Mathematics, 1985, suomentanut Kimmo Pietiläinen). Art House, 1994. ISBN 951-884-158-6

[2] Saturnino Salas, Einar Hille, Garrett Etgen. *Calculus.* John Wiley & Sons, Inc., 1990. 9. painos. ISBN 0-471-23120-7

[3] Eric W. Weisstein. *L'Hospital's Rule.* From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/LHospitalsRule.html, viitattu 3.10.2007